



ÉCOLE CENTRALE DE LYON

MÉCANIQUE DES FLUIDES ET APPLICATIONS



UNIVERSIDAD DE CHILE

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

LABORATORIO DE ESTUDIOS AVANZADOS EN
FENÓMENOS NO LINEALES

Étude expérimentale de l'instabilité d'un anneau de vorticité

Travail de Fin d'études / Stage de DEA

Rapport Final

Benoît CIBERT

Tuteur : Rodrigo HERNÁNDEZ

Correspondant ECL : Frédéric PLAZA

Avril–Septembre 2004

Résumé

Ce travail a été consacré à l'étude expérimentale de plusieurs aspects de la stabilité des anneaux de vorticité. Dans la première partie, nous obtenons numériquement le champ de vitesse d'un anneau stable à partir d'une distribution donnée de vorticité et en utilisant l'équation de Biot-Savart. Nous traçons les profils de vitesse et concluons sur la structure du cœur de l'anneau. Dans la deuxième partie nous mesurons le champ de vitesse d'anneaux de vorticité stables et instables dans le plan perpendiculaire à leur déplacement à l'aide d'une sonde an m trique à fil chaud. Le dispositif utilisé ici est un haut-parleur entraînant un piston poussant de l'air dans une boîte cylindrique fermée par un disque percé d'un trou parfaitement cylindrique en son centre. Plusieurs paramètres comme le diamètre du trou, le temps caractéristique de formation ou la distance d'acquisition sont modifiés pour identifier les caractéristiques de l'anneau. Différents nombres d'instabilités sont observés.

Mots-clés : anneau de vorticité, équation de Biot-Savart, instabilité, vitesse d'advection, circulation.

Abstract

This work has been devoted to the study of several aspects concerning the vortex ring stability. In the first part, we compute the velocity field of a stable ring from a given vorticity distribution using the Biot-Savart equation. We plot the velocity profiles and conclude on the vortex core of the ring structure. In the second part we measure the velocity field of both stable and unstable vorticity rings in a perpendicular plane to their movement with a hot wire anemometer. The apparatus used here is a speaker moving a piston pushing air in a cylindrical box closed by a disc with a perfectly cylindrical hole in its center. Various parameters like hole diameter, characteristic formation time or acquisition distance are modified in order to identify the ring characteristics. Several instability numbers are observed.

Key-words: vortex ring, Biot-Savart equation, instability, advection velocity, circulation.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Bilan bibliographique	5
1.2	Présentation du sujet	7
1.3	Objectifs	8
2	Modélisation tridimensionnelle d'un anneau de vorticité	9
2.1	Modèles théoriques	9
2.1.1	Vortex de Lamb-Oseen	9
2.1.2	Vortex sphérique de Hill	9
2.1.3	Anneau de vorticité de cœur fin	10
2.2	Modèles développés	11
2.2.1	Vortex potentiel	12
2.2.2	Filament vortical en rotation solide	13
2.2.3	Distribution gaussienne de vorticité dans un filament vortical	15
2.2.4	Anneau de vorticité stable en rotation solide	16
2.2.5	Distribution gaussienne de vorticité dans un anneau stable	19
2.3	Bilan de la phase numérique	22
3	Études et résultats expérimentaux	23
3.1	Formation des anneaux de vorticité et développement des instabilités	23
3.1.1	Dispositifs expérimentaux	23
3.1.2	Nombres de Reynolds	23
3.1.3	Analyse de la stabilité	25
3.1.4	Nombre d'instabilités	26
3.1.5	Analyse énergétique	28
3.2	Montage expérimental utilisé	28
3.3	Observations et résultats	34

3.3.1	Cartes des champs de vitesse et profils	34
3.3.2	Vitesse d'advection U_a	42
3.3.3	Circulation	43
3.3.4	Visualisation tridimensionnelle des isosurfaces de vitesse	45
3.3.5	Évolution des instabilités	50
3.3.6	Modification du diamètre de sortie	50
4	Conclusion	57
4.1	Bilan	57
4.2	Perspectives	57
4.3	Remerciements	59
A	Rappels théoriques	60
A.1	Équations de la vorticité	60
A.1.1	Préliminaires	60
A.1.2	Dynamique du tourbillon	62
A.2	Cas de l'anneau de vorticité	63
A.2.1	Champ de vitesse	63
A.2.2	Vitesse d'advection	64
B	Analogies entre électromagnétisme et hydrodynamique	66
B.1	Définitions	66
B.2	Équation de Biot-Savart	66
B.2.1	En électromagnétisme	66
B.2.2	En hydrodynamique	67
C	Calibration de l'anémomètre à fil chaud TSI 1201-20-39-39	68
C.1	Principe	68
C.2	Programmes Matlab	69
C.2.1	Calibration du TSI 39-39	69
C.2.2	Programme <i>calibra3</i>	71
D	Projet de consigne	72
D.1	Code Matlab de la nouvelle consigne	72
D.2	Consigne obtenue	72

E Quelques programmes Matlab	74
E.1 Programme <i>anneau2</i>	74
E.2 Programme <i>biotfil2</i>	75
E.3 Programme <i>biotann5</i>	76
E.4 Programme <i>widnall</i>	77
Bibliographie	79

Chapitre 1

Introduction

1.1 Bilan bibliographique

Il existe plusieurs raisons d'étudier les anneaux de vorticité. Prem i rement, leur aspect visuel et leur structure annulaire vorticale remarquable (figure 1.1) ont s du it et séduisent toujours un bon nombre de chercheurs. Mais l'étude de cette région compacte de vorticité capable, à l'inverse d'un filament vortical rectiligne, de se propager par elle-même, permet également d'expliquer et de comprendre certains phénomènes compliqués de mécanique des fluides, tels que les jets, les sillages, ainsi que la plupart des écoulements axisymétriques. Citons par ailleurs quelques applications pratiques des anneaux de vorticité, comme le forage sous-marin, ou la maîtrise des incendies de puits de pétrole (Shariff & Leonard [22]). Cependant, de nombreux aspects de ces anneaux, concernant notamment la formation, la propagation et l'apparition d'instabilités, restent encore sans réponse.

Dans notre travail de recherche nous nous penchons donc précisément sur le phénomène d'instabilité des anneaux de vorticité. Les trois approches classiques d'un problème scientifique (théorique, expérimentale, et numérique) ont été abordées pour comprendre la dynamique de ces instabilités. En 1939, Kruttsch démontre leur existence dès lors que l'on pousse un fluide en dehors d'un tube. Il présente même des images de ce phénomène et fournit les premières données quantitatives. Widnall & Sullivan [27] enquêtent alors, théoriquement et expérimentalement, sur le comportement de ces instabilités en 1973. Widnall, Bliss & Tsai [28]

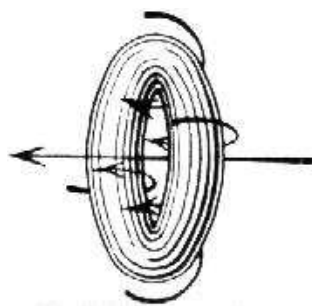


FIG. 1.1 – Anneau de vorticité, d'après Berliner [5].

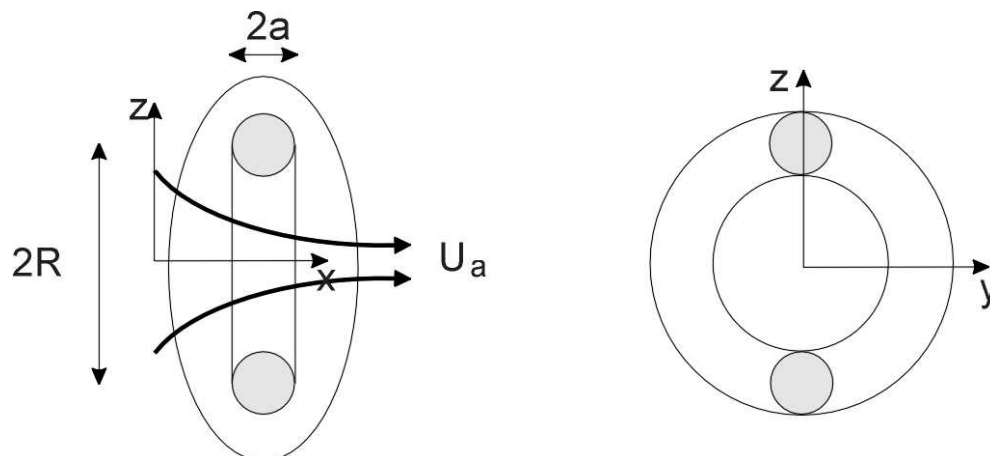


FIG. 1.2 – Paramétrage d'un anneau de vorticité de rayon R axisymétrique autour de x , de cœur de rayon a , et se déplaçant à la vitesse d'advection Ua dans le sens des x croissants.

présentent un modèle théorique en 1974 pour des instabilités de courtes longueurs d'ondes. En 1977, Widnall & Tsai [29] étudient à nouveau la stabilité d'un anneau de vorticité face à des ondulations de direction azimuthale. Ils se restreignent cependant à un anneau de cœur fin de distribution de vorticité uniforme dans un fluide idéal. Saffman [20] publie ensuite un article en 1978 proposant une explication rigoureuse de la dépendance au nombre de Reynolds ainsi qu'à différents paramètres du nombre d'ondulations observées. Enfin, très récemment, Fukumoto & Hattori [10] revisitent en 2003 la stabilité linéaire d'un anneau de vorticité.

Quant à l'approche numérique de ce phénomène, on trouve diverses études assez intéressantes. Ainsi, en 1991, Kida, Takaoka & Hussain [14] résolvent les équations de Navier-Stokes en utilisant une méthode spectrale à 64^3 points pour modéliser la collision de deux anneaux de vorticité. En 1994, Shariff, Verzicco & Orlandi [23] proposent une étude numérique des instabilités tridimensionnelles d'un anneau en tenant compte des phénomènes visqueux. James & Madnia [13] réalisent en 1996 une simulation numérique directe d'un anneau de vorticité laminaire. Fabris, Liepmann & Marcus [8] observent et numérisent la même année l'impact d'un anneau de vorticité sur une paroi. Les approches numériques semblent s'être multipliées ces dernières années, comme en témoignent les travaux de Mansfield, Knio & Meneveau [17] en 1999 sur la collision d'anneaux de vorticité coaxiaux, ou encore les simulations de Mohseni, Ran & Colonius [19] en 2001 confirmant l'existence d'un « nombre de formation » déjà mis en évidence par Gharib, Rambod & Shariff [11] en 1998.

Concernant l'approche expérimentale, nous devons à Maxworthy [18] une série d'expériences au cours desquelles la vitesse des anneaux ainsi que le taux de variation des instabilités ont pu être observés à l'aide de colorants et de techniques utilisant des bulles d'hydrogène. Plus récemment, Dazin, Dupont & Stanislas [6] ont étudié le développement d'instabilités sur des anneaux de vorticité obtenus dans l'eau. La méthode la plus fréquemment employée pour générer de tels anneaux consiste à pousser une certaine quantité de fluide à travers un orifice débouchant dans un milieu contenant le même fluide. Hormis les expériences de Dazin, Dupont & Stanislas [6], ainsi que celles de Gharib, Rambod, & Shariff [11], le fluide le plus généralement utilisé est de l'air, permettant de s'affranchir des effets visqueux. Par ailleurs,

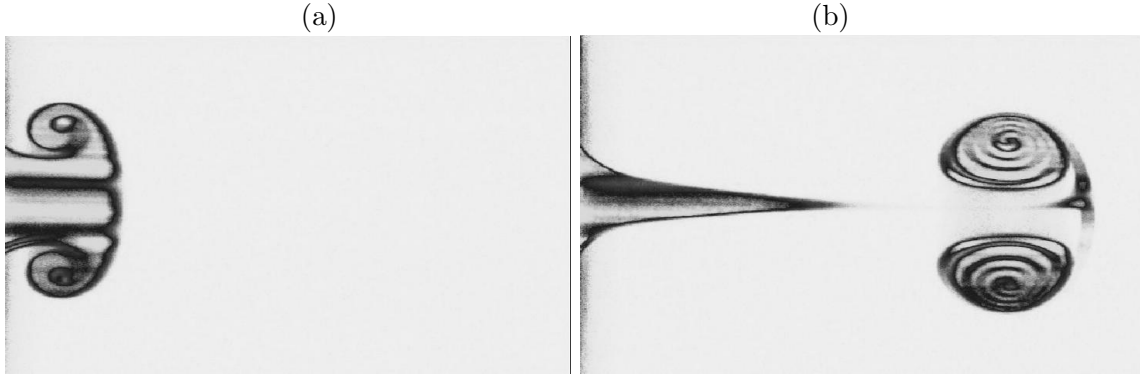


FIG. 1.3 – Anneau en phase de formation (a), et en phase laminaire (b). Images obtenues par visualisation CCD, tranche Laser et fumée dans le plan (x, z) . Diamètre de l’orifice de sortie : $D = 1,5$ cm.

à l’échelle du laboratoire, l’air sera considéré comme incompressible. On notera cependant l’approche originale de Arakeri, Das, Krothapalli & Lourenco [1] qui publient cette année même un article sur l’étude PIV (Particle Image Velocimetry) de la formation d’anneaux de vorticité à l’embouchure d’un tube à choc (fluide compressible en écoulement supersonique).

1.2 Présentation du sujet

On décompose habituellement la dynamique d’un anneau de vorticité en quatre étapes :

- la phase de formation (figure 1.3 a) ;
- la phase laminaire (figure 1.3 b) ;
- la phase de transition, au cours de laquelle apparaissent les instabilités qui nous intéressent (figure 1.4 b) ;
- la phase turbulente, que nous ne traiterons pas¹.

Les propriétés de l’anneau en phase laminaire (rayon R , rayon du cœur a , vitesse d’advection U_a) sont mesurables à l’aide de différentes techniques (vélocimétrie à Laser Doppler, vélocimétrie PIV, anémométrie à fil chaud) et ont d  j été identifiées par Béchet [4] en 2003. Notre travail porte donc plutôt sur la phase de transition et l’étude des instabilités et vient faire suite directement au travail de Béchet [4]. La formation et les caractéristiques de ces instabilités dépendent du nombre de Reynolds de l’écoulement [20], mais aussi et surtout de la géométrie du montage [12]. L’approche expérimentale est privilégiée pour examiner ce type de phénomène. Les anneaux générés engendrent des vitesses de l’ordre du mètre par seconde. Les deux autres approches énumérées précédemment permettent cependant d’apporter des informations complémentaires concernant notamment la répartition de vorticité à l’intérieur de l’anneau. Ce sujet est un sujet de recherche fondamentale. Les applications industrielles sont peu nombreuses pour le moment.

¹Kop’ev & Chernyshev [15], Lim [16], ainsi que Vladimirov & Tarasov [26] proposent des travaux intéressants sur le développement de la turbulence dans un anneau de vorticité.

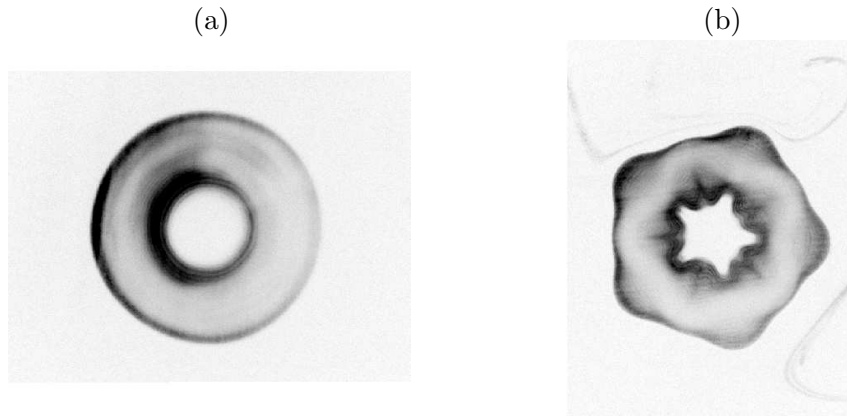


FIG. 1.4 – Anneau stable en phase laminaire (a), et anneau instable en phase de transition (b). Images obtenues par visualisation CCD, tranche Laser et fumée dans le plan (y, z) . Diamètre de l’anneau : $2R \approx 2,5$ cm. Béchet [4], 2003.

1.3 Objectifs

L’objectif principal de ce travail est l’étude dynamique d’une distribution compacte de vorticité ayant la forme topologique d’un tore. Cette distribution est matérialisée par un anneau de vorticité cr   expérimentalement.

Les objectifs spécifiques sont les suivants :

-  tape théorique :
 - constituer un résumé des principales notions sur la vorticité ;
 -  tablir le bilan des investigations expérimentales concernant les anneaux de vorticité stables et instables ;
-  tape numérique :
 - numériser le champ de vitesse induit par un filament vortical ;
 - calculer le champ de vitesse d’un anneau stable à partir de son champ de vorticité et à l’aide de l’équation de Biot-Savart ;
-  tape expérimentale :
 - mettre en place le montage expérimental ;
 - observer les cartes de champ de vitesse des anneaux générés ;
 - utiliser les résultats expérimentaux pour caractériser ces anneaux ;
 - reconstituer à partir des résultats expérimentaux une image tridimensionnelle des isosurfaces de vitesse ;
 - modifier certains paramètres géométriques du montage afin d’observer des instabilités différentes.

Chapitre 2

Modélisation tridimensionnelle d'un anneau de vortacité

2.1 Modèles théoriques

Nous rappelons brièvement dans un premier temps deux modèles de vortex connus ainsi que le modèle d'un anneau de vortacité de cœur fin.

2.1.1 Vortex de Lamb-Oseen

La description des vortex de Lamb-Oseen se trouve en annexe A page 65. La vitesse tangentielle u_θ dans un vortex d'Oseen s'écrit

$$u_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/4\nu t}\right),$$

où Γ_0 est la circulation, ν la viscosité cinématique et r la distance au centre du vortex. Par superposition, on peut obtenir le champ de vitesse créé par deux vortex d'Oseen de circulation opposée et distants de R (figure 2.1). Le profil obtenu présente un pic central et deux minimaux latéraux.

2.1.2 Vortex sphérique de Hill

Dans un vortex de Hill, la vortacité est confinée dans une sphère de rayon a en translation uniforme [21]. Les lignes de vortacité sont des cercles centrés sur un axe passant par le centre de la sphère et les lignes de courant appartiennent aux plans méridiens. L'écoulement est irrotationnel en dehors de la sphère. Les paramètres décrivant le vortex sphérique de Hill sont comparables à ceux décrivant l'anneau de cœur fin. Saffman [21] relie les deux modèles en introduisant le concept d'anneau à cœur « épais ».

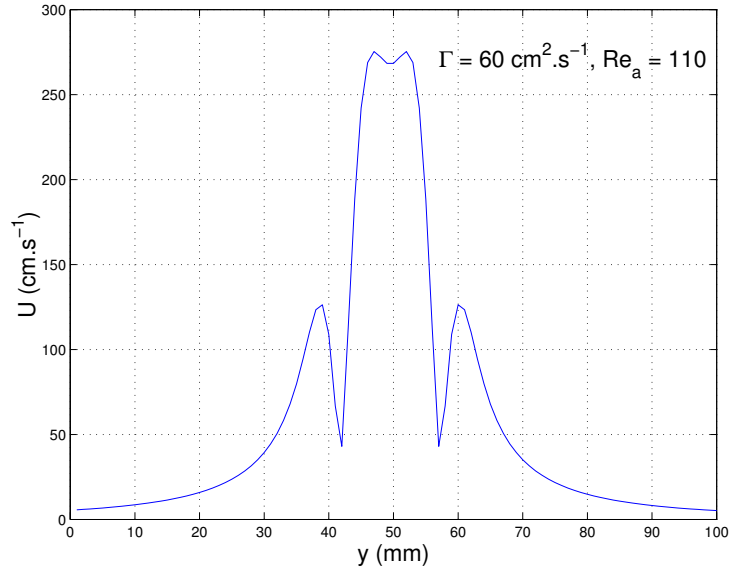


FIG. 2.1 – Profil de vitesse absolue calculé pour un ensemble adimensionnel de deux vortex de Lamb-Oseen sur l'axe de ce dipôle. Le nombre de Reynolds utilisé correspond au Reynolds d'advection $\text{Re}_a = U_a R / \nu$.

2.1.3 Anneau de vorticité de cœur fin

Soit un filament vortical fin orienté verticalement dans le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Son champ de vitesse $\mathbf{u}$ est donné dans ce repère par

$$(u_r = 0, \quad u_\theta = u(r), \quad u_z = 0).$$

L'expression de la circulation

$$\Gamma = \int_0^r 2\pi r' \omega dr' = 2\pi r u(r)$$

de ce filament implique

$$u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

champ de vitesse d'un vortex ponctuel. Le champ de vorticité est donné par :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru(r))}{dr} \mathbf{e}_z,$$

d'où

$$\omega(r) = \omega_0 \delta(r).$$

Donnons à présent une «  paisseur » matérielle de rayon a à ce filament. On obtient alors en courbant le filament un anneau de vorticité de rayon R et de rayon de cœur a . Si le rapport a/R est très inférieur à 1, on pourra alors considérer cet anneau comme un anneau de cœur fin (voir annexe A section A.2).

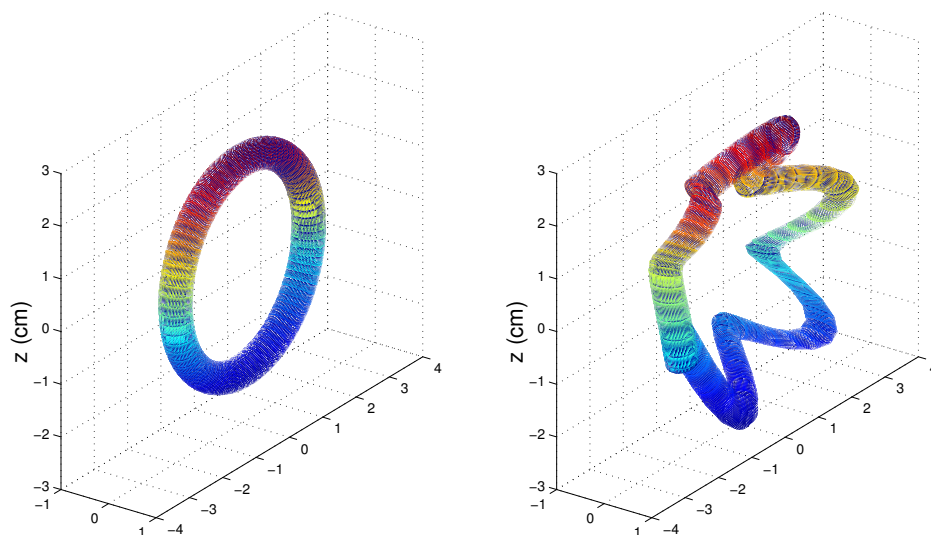


FIG. 2.2 – Géométrie d'un anneau stable et d'un anneau instable de rayon $R = 2$ cm et de rayon de cœur $a = 0,3$ cm. Le nombre d'instabilités numérisées est de 6, et l'amplitude des perturbations axiales et radiales sont égales à $0,5$ cm. Figures obtenues avec le programme *anneau2* (voir section E.1)

Visualisons à présent l'allure des instabilités de Widnall [28] développées sur un anneau de vorticité de cœur fin dont les paramètres sont les suivants : rayon $R = 2$ cm, rayon du cœur $a = 0,3$ cm, nombre d'instabilités $n = 6$, amplitude de perturbation radiale $\rho_0 = 0,5$ cm, et amplitude de perturbation axiale $\xi_0 = 0,5$ cm. Nous programmons ainsi sous Matlab l'allure géométrique d'un anneau stable et de l'anneau instable correspondant (figure 2.2). Le rapport $a/R = 0,15$ peut être considéré comme très inférieur à 1, l'anneau modélisé est donc bien un anneau de cœur fin.

2.2 Modèles développés

Béchet [4] obtient en 2003 le profil de vitesse de la figure 2.3, mesuré au centre d'un anneau stable sur un axe normal à son déplacement. Ce profil est comparable à celui obtenu numériquement pour un ensemble adimensionnel de deux vortex de Lamb-Oseen (figure 2.1). Il nous vient alors l'idée d'obtenir le profil de vitesse d'un anneau de vorticité stable par simulation numérique. L'objectif est de numériser l'équation de Biot-Savart (A.3) afin d'obtenir

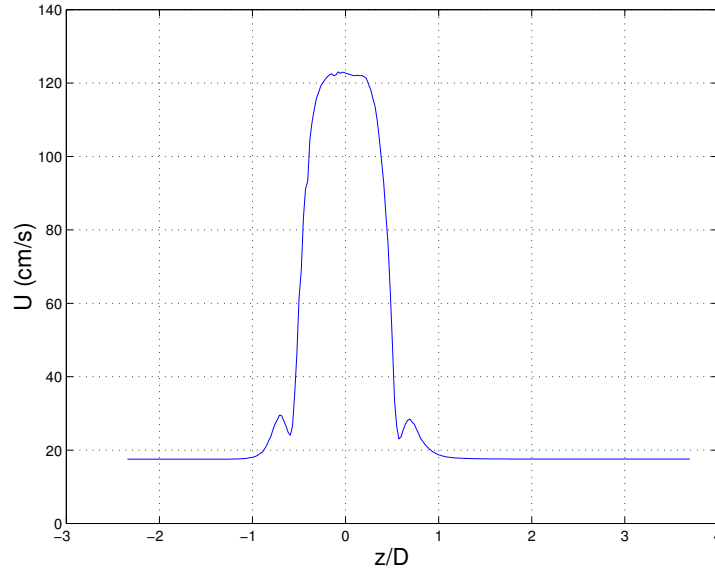


FIG. 2.3 – Profil de vitesse au centre d’un anneau stable, sur un axe normal à son déplacement. Paramètres : diamètre de sortie $D = 15$ mm, épaisseur du disque $e = 1,5$ mm, temps de montée de la consigne $\tau_m = 21,0$ ms et distance d’acquisition $x_0/D = 7,3$. Béchet [4], 2003

les trois composantes du champ de vitesse à partir d’une distribution de vorticité donnée. En approchant la courbe expérimentale obtenue par Béchet [4], on définira alors les paramètres d’entrée et on tranchera sur le type d’anneau observé.

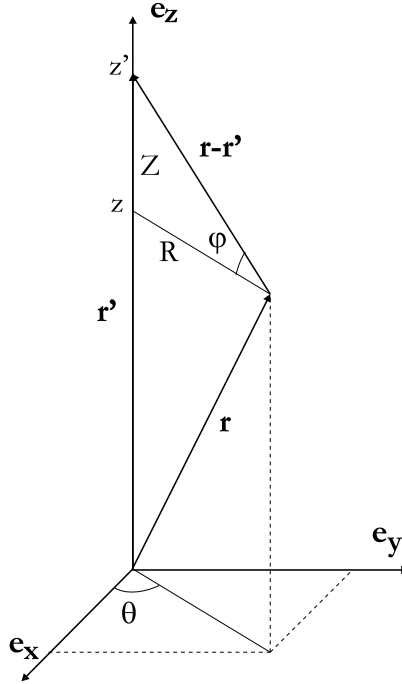
2.2.1 Vortex potentiel

La sous-section 2.1.3 présente le calcul du champ de vorticité à partir du champ de vitesse supposé connu d’un filament vortical infiniment fin orienté verticalement dans le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Plaçons-nous dans le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ (figure 2.4) et montrons que l’on peut retrouver ce champ de vitesse à partir du champ de vorticité supposé connu suivant :

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') = \omega_0 \delta(\mathbf{r}') \mathbf{e}_z = \begin{cases} \omega_0 \mathbf{e}_z & \text{si } \mathbf{r}' = (0, 0, z') \\ \mathbf{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour calculer $\mathbf{u}$, on fixe $\mathbf{r}$ et on fait varier $\mathbf{r}'$ dans l’équation de Biot-Savart.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{(0, 0, \omega_0) \times (R \cos \theta, R \sin \theta, Z)}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} d^3Z \quad \text{où } Z = |z - z'| \\ &= \frac{R\omega_0}{4\pi} \int \frac{d^3Z}{(R^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_\theta \quad \text{où } \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

FIG. 2.4 – Filament vortical infiniment fin orienté par l'axe e_z

En effectuant le changement de variable $Z = R \tan \varphi$, on obtient :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{R\omega_0}{4\pi} \int \underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi}{R^2} d\varphi \right)}_{2/R^2} d^2 Z \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_\theta}{2\pi R} \int \omega_0 d^2 Z = \frac{\mathbf{e}_\theta}{2\pi R} \int \omega_0 \delta(\mathbf{r}') \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{e}_\theta}{2\pi R} \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \mathbf{e}_\theta.$$

2.2.2 Filament vortical en rotation solide

Il est bien évident que le vortex potentiel reste un modèle mathématique et ne nous permet pas de considérer l'épaisseur matérielle du filament. Le rayon du filament étant une grandeur pouvant se définir de plusieurs manières, nous décidons dans un premier temps d'adopter la modélisation suivante :

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{cases} 1 & \text{à l'intérieur d'un filament de rayon } a; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On obtient alors un filament vortical en rotation solide à la vitesse Ω . Le champ de vitesse est linéaire pour $r < a$ et décroissant en $1/r$ pour $r > a$. Nous retrouvons à partir de l'équation de Biot-Savart le champ et le profil de vitesse d'un filament de rayon $a = 2,25$ cm (figure 2.5) à l'aide du programme *biotfil2* (voir section E.2).

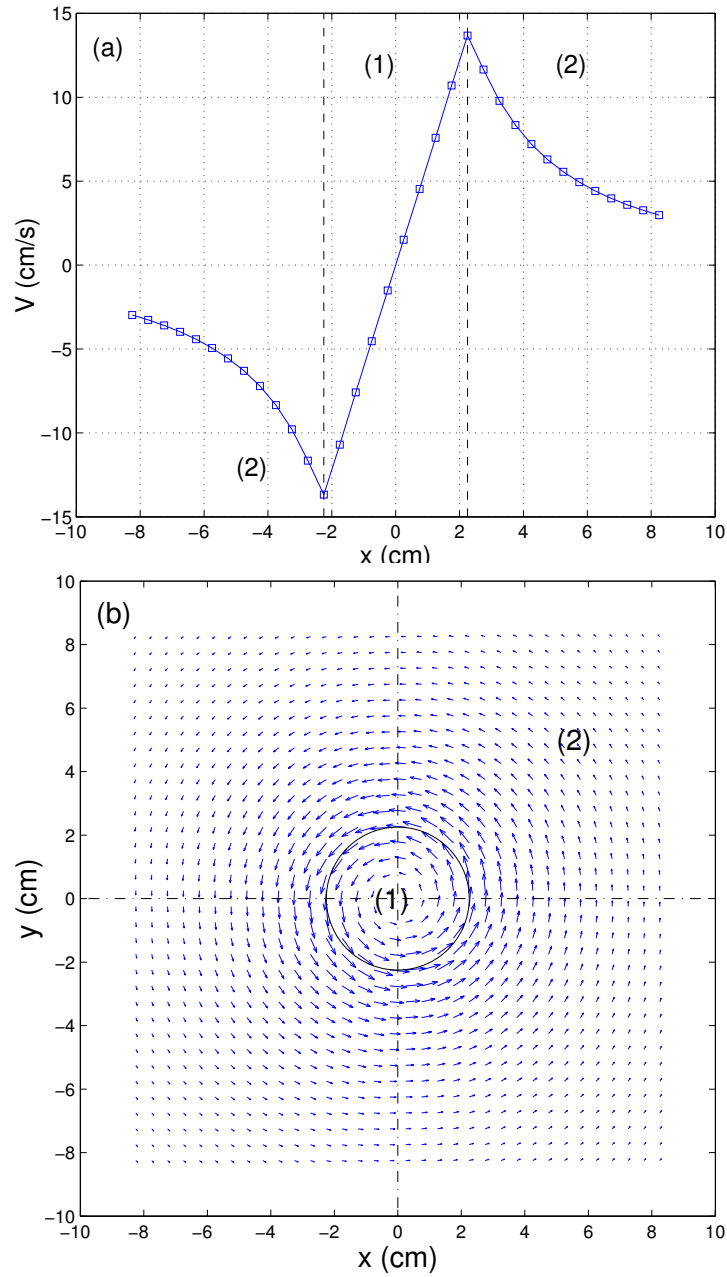


FIG. 2.5 – Profil (a) et champ de vitesse (b) dans la coupe transversale d'un filament vortical en rotation solide de rayon $a = 2,25$ cm et calculés à l'aide de l'équation de Biot-Savart. Le champ de vitesse augmente linéairement dans la zone (1) et varie en $-1/r$ dans la zone (2), avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La distance du centre au point anguleux entre les zones (1) et (2) est égale au rayon du filament.

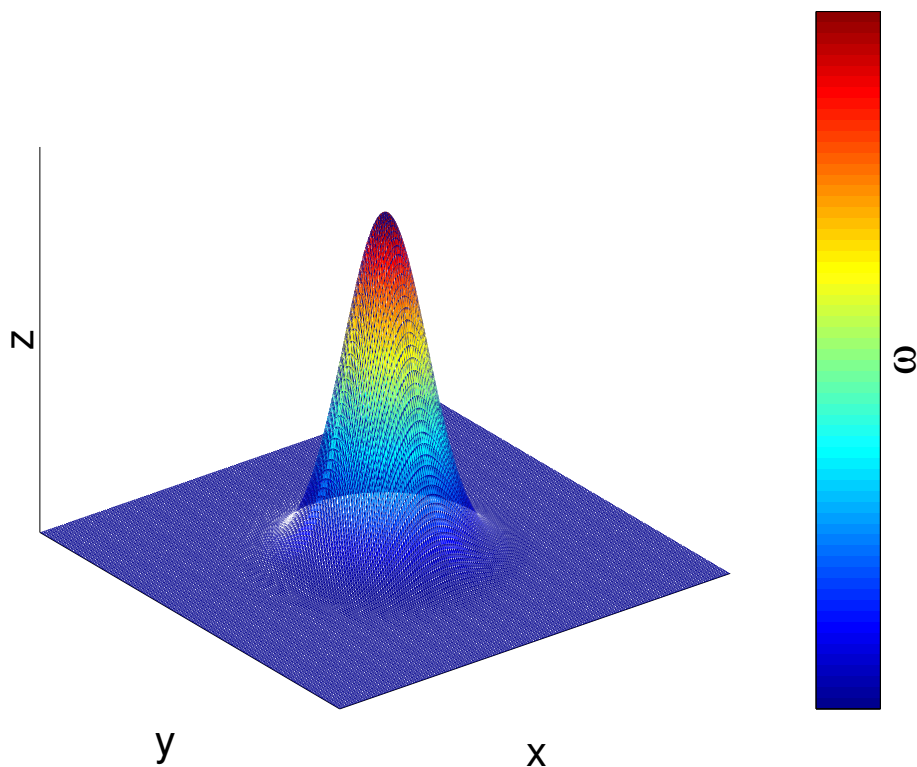


FIG. 2.6 – Allure d’une distribution gaussienne de vorticité dans la coupe transversale d’un filament vortical. La vorticité est maximale au centre du filament (zone rouge) et décroît en s’éloignant du centre. Le rayon du filament est dans ce cas beaucoup plus difficile à déterminer puisque la vorticité n’est pas forcément nulle à l’extérieur du filament.

2.2.3 Distribution gaussienne de vorticité dans un filament vortical

Afin d’affiner notre modèle de filament vortical, nous considérons à présent une distribution gaussienne de vorticité à l’intérieur du filament. Autrement dit, la distribution de vorticité dans une coupe du filament aura l’allure de la figure 2.6.

Dans cette situation, la vorticité est maximale au centre du filament et le rayon du filament est défini comme la distance au centre pour laquelle la distribution de vorticité est nulle ou égale à un pourcentage de la vorticité maximale. De même que précédemment, on obtient à partir de Biot-Savart et à l’aide d’un programme similaire à *biotfil2* le profil et le champ de vitesse dans la coupe transversale d’un filament vortical (figure 2.7). La forme du profil gaussien confirme que le rayon n’est pas défini par un point anguleux comme dans le cas de la rotation solide. On estime alors ce rayon par comparaison des deux modèles (figure 2.8). À l’extérieur du filament, la norme du champ de vitesse du filament gaussien décroît moins vite que dans le cas d’un filament en rotation solide. Par ailleurs, le point anguleux est « arrondi » dans le cas d’une distribution gaussienne. Ceci s’explique par le fait que la vorticité ne passe pas brutalement à zéro à l’extérieur du filament. Le modèle gaussien semble plus proche de

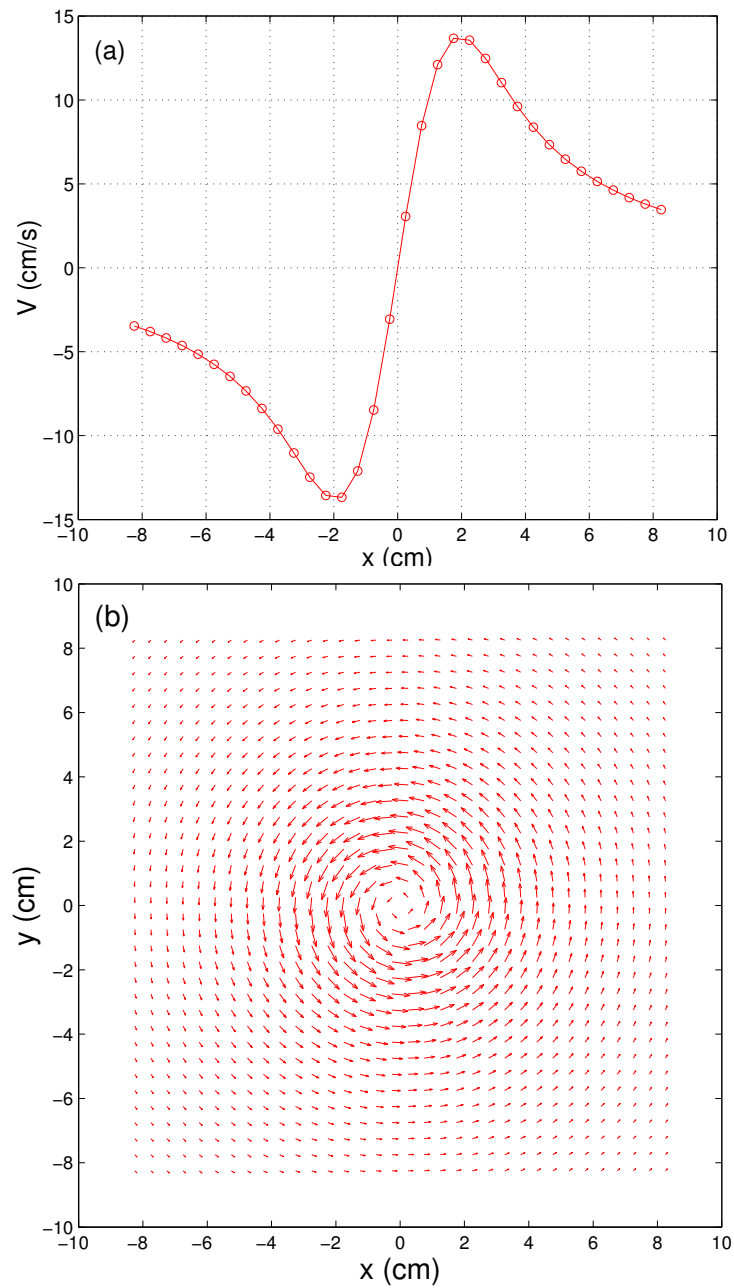


FIG. 2.7 – Profil (a) et champ de vitesse (b) dans la coupe transversale d'un filament vortical dont la distribution de vorticité est gaussienne et calculés à l'aide de l'équation de Biot-Savart.

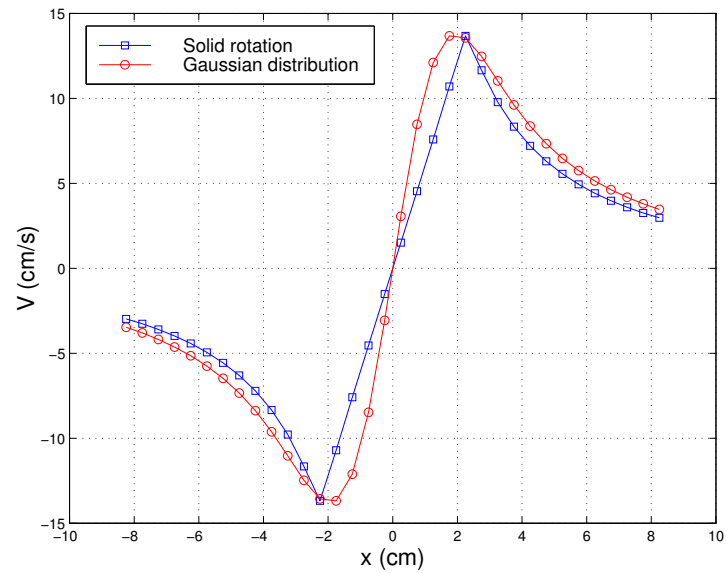


FIG. 2.8 – Comparaison des profils de vitesse obtenus numériquement sur les coupes d'un filament vortical en rotation solide et avec une distribution de vorticité gaussienne. Rayon $a = 2,25$ cm.

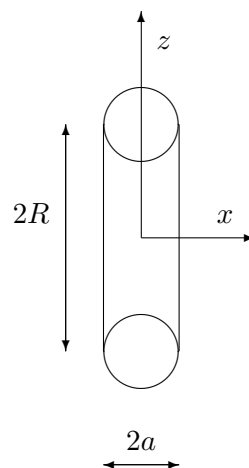


FIG. 2.9 – Tore. Coupe dans le plan (x, z)

selon $\mathbf{e}_x$ est nulle : $\omega_x = 0$. On obtient alors les composantes ω_y et ω_z en chaque point $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ de l'espace où la vorticité est non nulle de la manière suivante :

$$\omega_y = -\omega \sin(\arctan(z'/y')) \text{ et } \omega_z = \omega \cos(\arctan(z'/y')).$$

On décide dans un premier temps de modéliser un anneau de rapport $a/R = 0,5$. Afin d'optimiser le calcul du champ de vitesse, on réalise trois essais avec un maillage de la matrice externe respectivement égal à 22^3 , 34^3 et 42^3 . On construit ensuite la matrice interne des points $\mathbf{x}'$. Les deux matrices sont décalées pour éviter les divisions par zéro. Une fois la matrice cubique de répartition du champ de vorticité construite, on calcule progressivement l'intégrale de Biot-Savart de la manière suivante. En tout point $\mathbf{x}$ de l'espace où l'on veut connaître le champ de vitesse $\mathbf{u}$, on calcule pour chaque point $\mathbf{x}'$ la norme $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ et les trois composantes u_x , u_y et u_z du champ de vitesse $\mathbf{u}$. Cette opération se réalise donc à l'aide de trois boucles imbriquées correspondant au balayage dans les trois directions de l'espace de la matrice interne.   chaque itération, c'est toute la matrice externe qui est modifiée.   la fin du programme, on a donc accès aux trois composantes du champ de vitesse résultant. On calcule alors la norme de ce champ de vitesse et on trace le profil de vitesse au centre de l'anneau sur un axe normal à son déplacement (*i.e* y ou z).

Afin de savoir s'il faut encore augmenter le nombre de points de la matrice externe, on interpole les trois profils obtenus avec les trois résolutions énoncées plus haut et on les compare en calculant leur coefficient de corrélation. Les résultats sont consignés dans le tableau 2.1 et la figure 2.10 montre les trois profils. On peut alors considérer que le maillage 42^3 est suffisant et qu'un maillage plus fin n'apporterait pas d'informations supplémentaires.

On peut alors maintenant chercher à modifier le rapport a/R afin de comparer le profil de vitesse observé sur des anneaux de vorticité de cœur fin ($a/R \ll 1$)   celui observé sur des anneaux de vorticité de cœur «  pais » ($a/R \approx 1$). Le programme *biotann5* (voir section E.3) nous permet d'obtenir le profil d'un anneau de rayon $R = 4$ cm dont on peut faire varier le rayon du cœur a en paramètre d'entrée afin de modifier le rapport a/R .

2.2.5 Distribution gaussienne de vorticité dans un anneau stable

Une première approche consiste à combiner la distribution gaussienne et la rotation solide. Cette approximation permet de fixer directement le rayon du cœur de l'anneau et de distribuer la vorticité comme suit :

$$\omega \begin{cases} \text{distribuée de manière gaussienne à l'intérieur de l'anneau;} \\ \text{nulle ailleurs.} \end{cases}$$

L'inconvénient de cette approche réside dans le fait qu'une « marche » de vorticité subsiste au passage de la frontière entre le cœur de l'anneau et l'environnement extérieur. Elle est cependant plus facile à programmer et réduit considérablement le temps de calcul. De même que pour la rotation solide, et avec un programme similaire au programme *biotann5*, on vérifie dans un premier temps les coefficients de corrélation entre les différents maillages (figure 2.10 et tableau 2.1), puis on modifie ensuite le rapport a/R (figure 2.11).

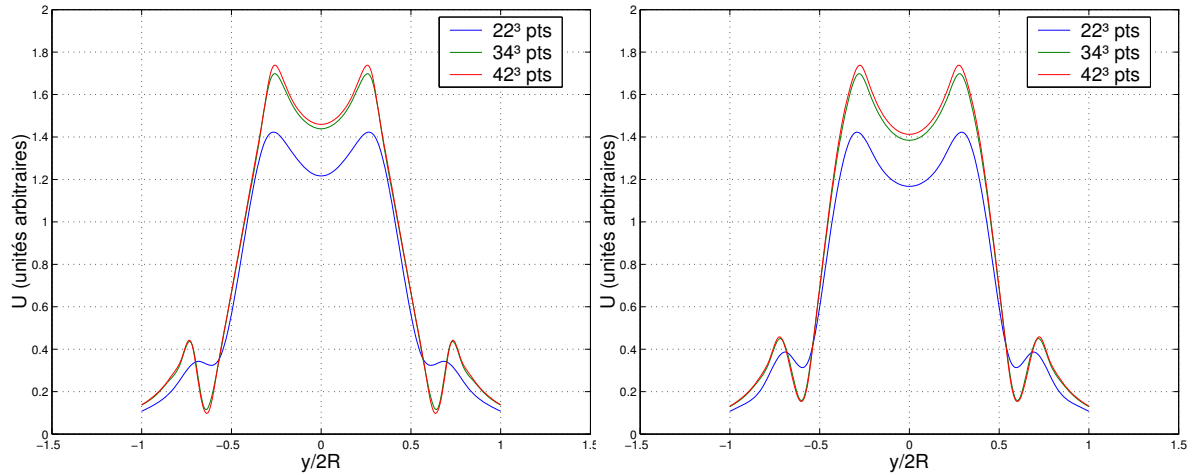


FIG. 2.10 – Comparaison des trois profils obtenus pour un maillage de la matrice cubique externe des points $\mathbf{x}$ respectivement égal à 22^3 , 34^3 et 42^3 points. Profils sur l'axe y au centre d'un anneau de rapport $a/R = 0,5$ en rotation solide (à gauche) et à distribution gaussienne de vorticité (   droite). Les coefficients de corélation entre les différentes résolutions sont consignés dans le tableau 2.1

Rotation solide	
Maillages	Coefficient de cor��lation
$(22^3, 34^3)$	0,990 82
$(34^3, 42^3)$	0,999 90
Distribution gaussienne de vorticit��	
Maillages	Coefficient de cor��lation
$(22^3, 34^3)$	0,995 16
$(34^3, 42^3)$	0,999 93

TAB. 2.1 – Les coefficients de cor  lations présentés dans ce tableau comparent les interpolations des profils obtenus dans le cas d'une rotation solide et dans le cas d'une distribution gaussienne de vorticité pour trois maillages différents (22^3 , 34^3 et 42^3).

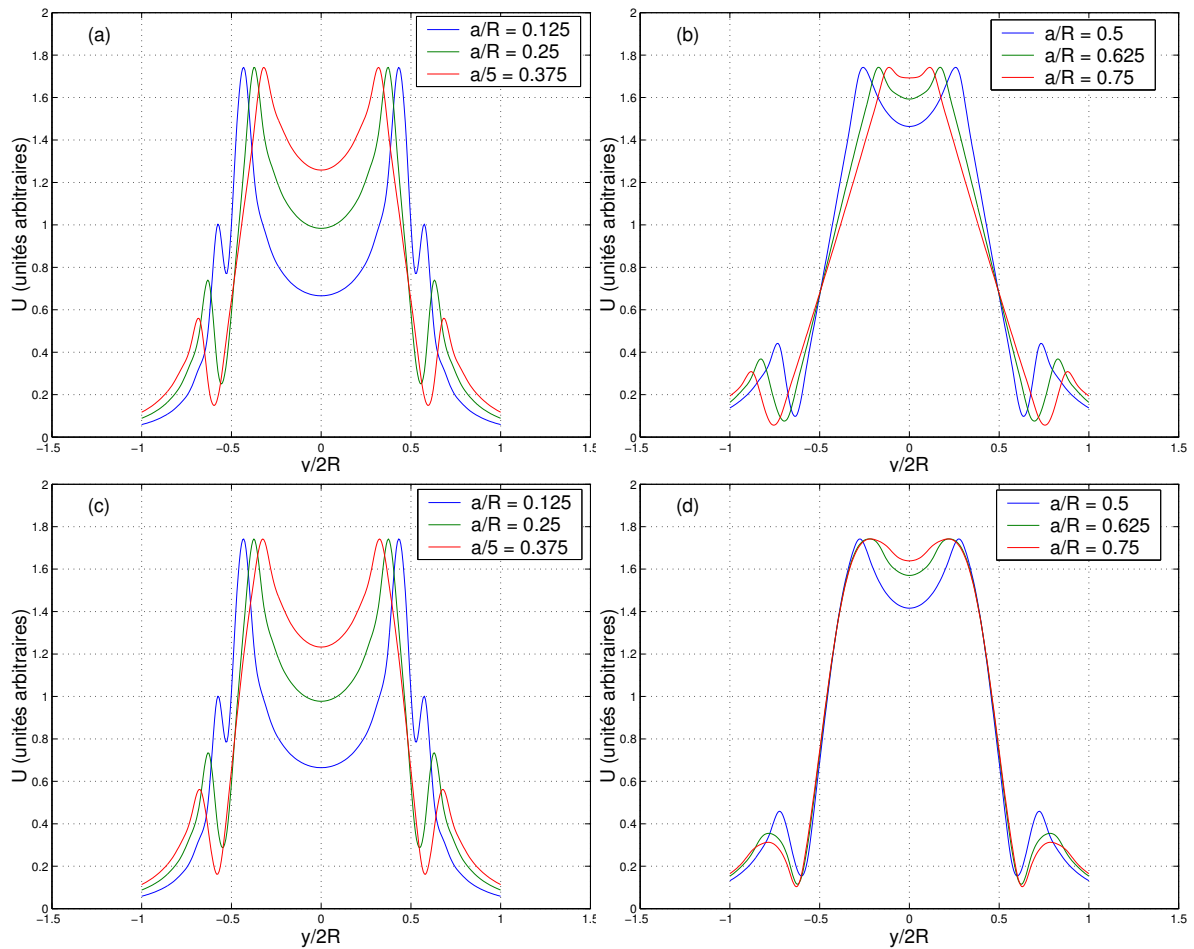


FIG. 2.11 – Ces quatre figures sont à interpréter deux à deux. (a) et (b) : Rotation solide. La croissance entre les minima locaux de vitesse et les maxima est linéaire. (c) et (d) : Distribution gaussienne. On distingue bien la croissance gaussienne entre les minima locaux et les maxima. (a) et (c) : Anneaux de cœur fin. Le rapport a/R est petit devant 1. La finesse du cœur est à l'origine du creux très marqué entre les deux maxima de vitesse. (b) et (d) : Anneaux de cœur épais. Le rapport a/R est de l'ordre de 1. Le creux est beaucoup plus atténué.

2.3 Bilan de la phase numérique

La comparaison des profils obtenus numériquement et présentés dans la figure 2.11 avec le profil de la figure 2.3 mesuré par Béchet [4] nous permet déjà d’obtenir quelques informations sur l’anneau que nous allons observer expérimentalement.

En premier lieu, nous pouvons déduire que la répartition de vorticité à l’intérieur de l’anneau s’apparente à une distribution gaussienne, confirmant ainsi que le modèle gaussien offre une modélisation tenant compte des phénomènes de viscosité à l’intérieur de l’anneau. On retrouve également les deux minimaux locaux déjà observés sur le profil du vortex de Lamb-Oseen (figure 2.1).

Par ailleurs, la comparaison entre les anneaux de cœur fin et les anneaux de cœur épais montre que l’on est plutôt en présence d’anneaux de cœur épais. Cette hypothèse a d’ailleurs été vérifiée lors de visualisations tranche Laser et fumée. Les instabilités observées ne seront donc pas des instabilités de Widnall [28].

Chapitre 3

Études et résultats expérimentaux

3.1 Formation des anneaux de vorticité et développement des instabilités

3.1.1 Dispositifs expérimentaux

Comme nous l’avons évoqué au chapitre 1, le moyen le plus fréquemment utilisé pour obtenir des anneaux de vorticité est de pousser une masse de fluide à travers un orifice pendant un temps très court τ . La plupart des expérimentateurs utilisent un tube de diamètre D   l’intérieur duquel un piston de même diamètre et de course L pousse une masse de fluide à la vitesse u_p , comme le montre la figure 3.1. D’autres expérimentateurs préfèrent utiliser un deuxième type de géométrie (figure 3.2). Dans ce cas, le fluide est poussé à l’intérieur d’une « boîte » cylindrique par un piston généralement actionné, comme dans l’expérience de Sullivan, Widnall & Ezekiel [25], par un haut-parleur. On définit par R le rayon de l’anneau et par a le rayon du cœur. Par ailleurs, le diamètre de sortie D , le diamètre du piston D_p , sa course L et sa vitesse u_p sont des paramètres permettant de définir le nombre de Reynolds de sortie Re_s et le nombre de Reynolds du piston Re_p associés respectivement à l’écoulement de sortie et au mouvement du piston. Concernant les techniques d’acquisition des données, on distingue au moins trois méthodes de mesures du champ de vitesse d’un anneau de vorticité :

- la vélocimétrie à Laser Doppler [25] ;
- la vélocimétrie PIV (Particle Image Velocimetry) ;
- l’anémométrie à fil chaud.

3.1.2 Nombres de Reynolds

L’article de Gharib, Rambod & Shariff [11] nous permet de poser le choix de paramètres caractéristiques cohérents. Partons du principe que pour une géométrie donnée, la circulation Γ de l’anneau dépend de la vitesse du piston $u_p(t)$, du diamètre de l’orifice D , de la viscosité cinématique ν et du temps de décharge τ . La distance L parcouru par le piston est un paramètre dérivé lié à $u_p(t)$ par

$$L = \int_0^\tau u_p(t) dt.$$

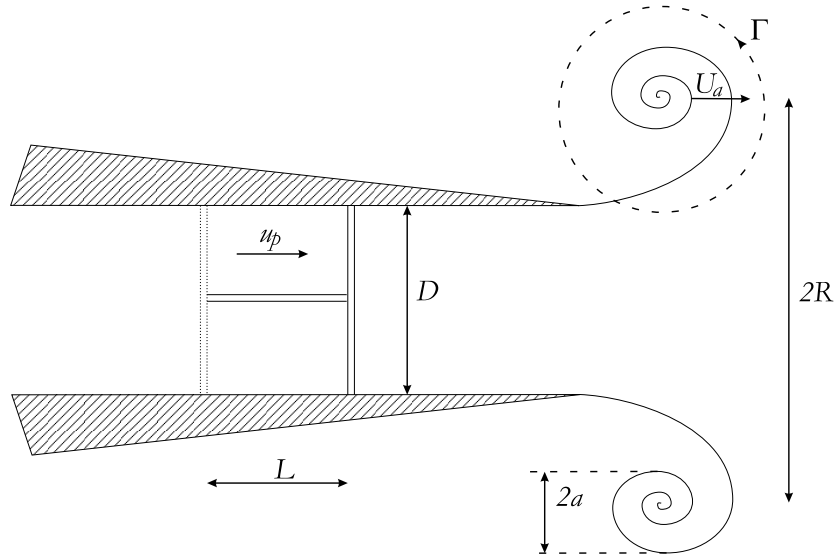


FIG. 3.1 – Production d’anneaux de vorticité. Géométrie « tube ». Coupe dans le plan (x, z) . Un piston de diamètre D pousse à la vitesse u_p sur une distance L une masse de fluide à travers un tube de diamètre D afin de créer un anneau de vorticité de rayon R de cœur de rayon a et de circulation Γ avançant à la vitesse d’advection U_a .

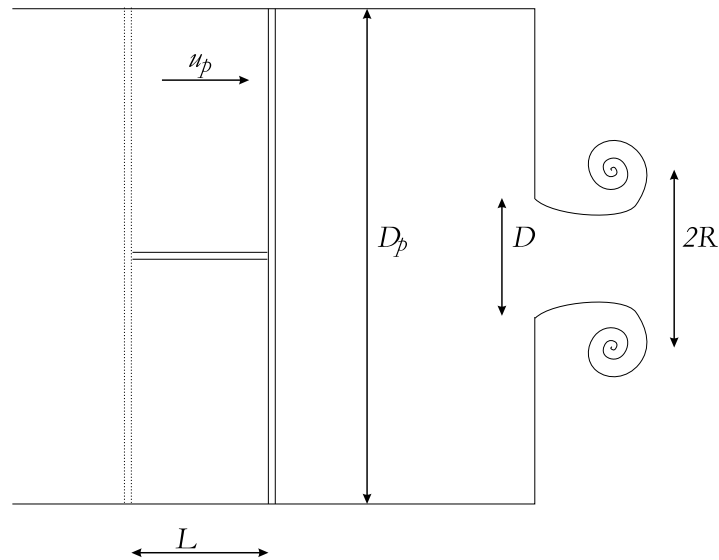


FIG. 3.2 – Production d’anneaux de vorticité. Géométrie « boîte ». Coupe dans le plan (x, z) . Dans cette configuration, le piston de diamètre D_p pousse une masse de fluide à travers une boîte cylindrique de diamètre D_p débouchant par un orifice de diamètre D .

On introduit alors la grandeur moyenn e U_p définie par

$$U_p = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u_p(t) dt.$$

On réduit finalement l'ensemble des paramètres à trois nombres adimensionnels :

$$\frac{u_p}{U_p}, \quad \frac{\Gamma}{U_p D}, \quad \frac{U_p \tau}{D}.$$

Le nombre de Reynolds considéré est alors

$$Re = \frac{\Gamma}{\nu}.$$

Notons qu'avec cette définition, Gharib, Rambod & Shariff [11] obtiennent des Re maximums de l'ordre de $6 \cdot 10^3$.

Saffman [20] définit pour les deux types de montage (figures 3.1 et 3.2) un nombre de Reynolds

$$Re = \frac{U_p D}{\nu}.$$

Il obtient une échelle théorique de Reynolds variant de 10^4 à $9 \cdot 10^4$.

Béchet [4] définit pour le deuxième type de montage seulement (figure 3.2) les deux nombres de Reynolds

$$Re_p = \frac{U_p D_p}{\nu} \quad \text{et} \quad Re_s = \frac{U_s D}{\nu}$$

associés respectivement au déplacement du piston et à l'écoulement moyen en sortie du dispositif, où U_s , la vitesse de sortie, est reliée à la vitesse du piston par la conservation des débits volumiques :

$$Q_s = \frac{\pi D^2}{4} U_s = \frac{\pi D_p^2}{4} U_p.$$

Ses courbes expérimentales donnant les deux nombres de Reynolds en fonction de la fréquence du haut-parleur laissent apparaître un Reynolds du piston variant de 2 à 10 et un Reynolds de sortie variant de 10 à 70. On est donc loin de l'échelle des Reynolds envisagés théoriquement par Saffman.

Face à de telles différences, nous chercherons à redéfinir un nombre de Reynolds plus approprié au phénomène à observer. Habituellement, ce nombre compare un temps caractéristique de diffusion visqueuse à un temps caractéristique de convection. Ici, la diffusion visqueuse nous intéresse peu, et le temps à prendre en compte serait plutôt un temps caractéristique de développement des instabilités.

3.1.3 Analyse de la stabilité

Dans leur travail de 1973, Widnall & Sullivan [27] observent le comportement d'un anneau de vorticité de petit co ur vortical (*i.e.* $a \ll R$) dans un fluide non visqueux face aux petits déplacements de sa « ligne centrale ». Il apparaît alors que l'anneau est presque toujours instable dans un fluide idéal. Expérimentalement, leurs anneaux sont générés dans l'air et

leurs mesures des fluctuations de vitesse le long de la « ligne centrale » sont effectuées par vélocimétrie Laser, et par des processus classiques de visualisation déjà utilisés en 1973 par Sullivan, Widnall & Ezekiel [25].

Pour un filament de petit cœur, la vitesse induite d'un point $\mathbf{r}'$ du filament peut s'évaluer à l'aide de la loi de Biot-Savart en fonction de la distribution de vorticité à l'intérieur du cœur :

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}') = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Les perturbations du filament sont considérées comme des déplacements sinusoïdaux dans les deux directions axiale et radiale (voir figure 3.3). Dans un système de coordonnées avançant à la vitesse d'advection $\mathbf{U}_a$ définie dans la section A.2.2, les composantes cartésiennes d'un point du filament perturbé sont

$$\mathbf{r} \begin{cases} x &= \xi_0 e^{in\theta} \\ y &= (R + \rho_0 e^{in\theta}) \cos \theta \\ z &= (R + \rho_0 e^{in\theta}) \sin \theta \end{cases}, \quad (3.2)$$

où ξ_0 et ρ_0 sont les amplitudes de perturbation axiale et radiale respectivement. n correspond au nombre d'ondulations observées.

3.1.4 Nombre d'instabilités

Le nombre d'instabilités n , ou nombre d'ondulations, est tel que $n = kR$ [20], où R est le rayon de l'anneau et k un nombre résultant de l'analyse d'un filament vortical rectiligne soumis à des ondes stationnaires infinitésimales. n dépend essentiellement de la taille du cœur [27] et de la distribution de vorticité dans l'anneau. Ainsi, d'après Sullivan, Widnall & Ezekiel [25], plus le rayon du cœur est petit, plus le nombre d'ondulations est grand.

Un paramètre intéressant pour l'étude des instabilités des anneaux de vorticité est la vitesse d'advection adimensionnelle de l'anneau. Celle-ci s'exprime comme suit :

$$\tilde{U}_a = \frac{4\pi R U_a}{\Gamma} = \ln \frac{8R}{a_e} - \frac{1}{4}. \quad (3.3)$$

$\tilde{U}_a$ caractérise la distribution de vorticité à travers le paramètre a_e (voir page 64) et la finesse du cœur à travers le paramètre R/a_e . Selon Widnall, Bliss & Tsai [28], l'anneau devient instable si $ka_e = 1,44$ i.e. si $R/a_e = n/ka_e = n/1,44$. La vitesse d'advection adimensionnelle s'écrit alors :

$$\tilde{U}_a = \ln \frac{8n}{1,44} - \frac{1}{4}. \quad (3.4)$$

Les travaux de Béchet [4] montrent cependant que les instabilités observées sont en désaccord avec la prédiction théorique. Cet écart provient des limites de l'hypothèse de l'anneau à « cœur fin ». Saffman [20] explique que cette incohérence vient d'un mauvais paramétrage de la distribution de vorticité à l'intérieur du cœur et considère que le nombre d'instabilités n est relié étroitement au nombre de Reynolds associé au piston.

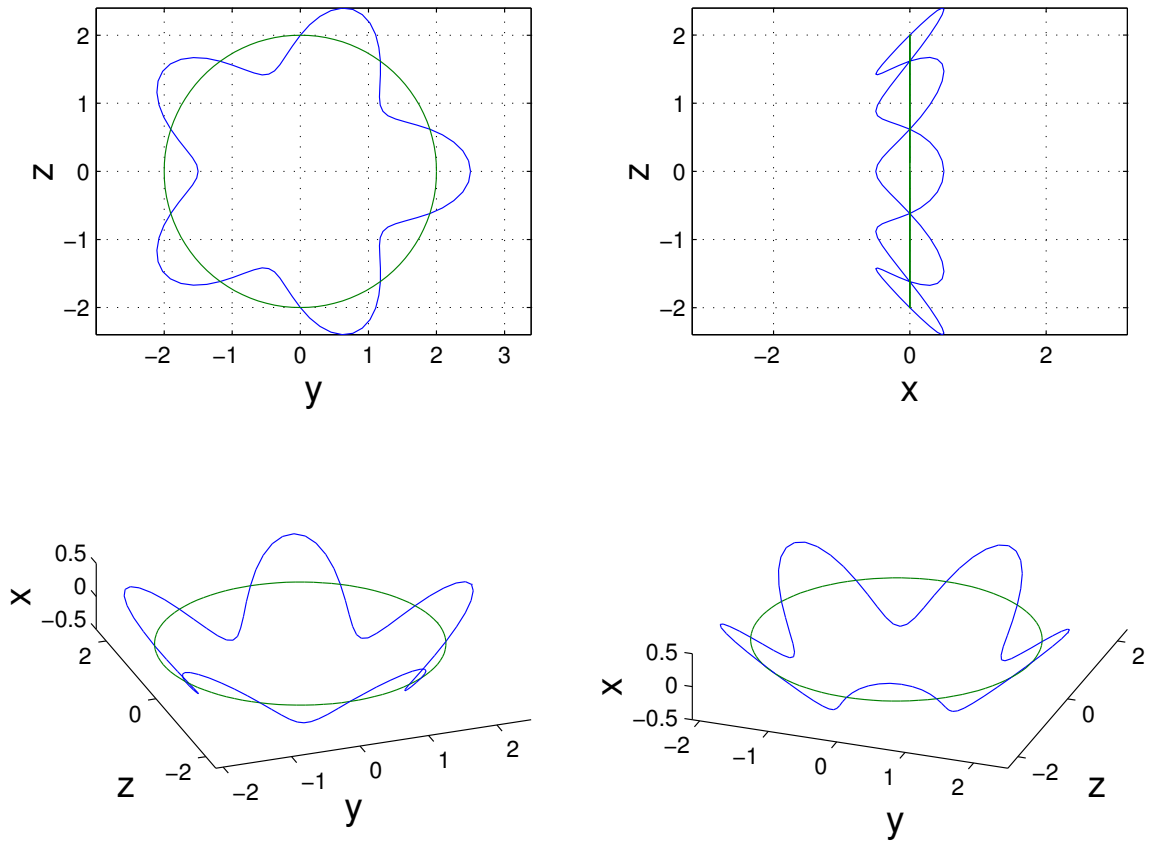


FIG. 3.3 – Allure des instabilités de Widnall appliquées à la ligne centrale du cœur d’un anneau de vorticité avec $R = 2$ cm, $n = 5$, $\rho_0 = 0,5$ cm, $\xi_0 = 0,5$ cm. Cette figure, obtenue à l’aide du programme *widnall* (voir section E.4) est à comparer avec la figure 2.2 qui montre l’allure de six instabilités développées sur un anneau de cœur de rayon a .



FIG. 3.4 – Description qualitative du montage expérimental utilisé. La photo de gauche montre la partie mécanique (banc expérimental, dispositif de génération des anneaux, anémomètre, moteurs pas à pas, axes horizontal et vertical) protégée des écoulements parasites de la pièce par une cage. La photo de droite montre la partie électronique (générateur de fonctions, amplificateur de puissance, filtre, boîtier de commande des moteurs et carte d'acquisition). L'interface graphique de la figure 3.8 apparaît sur l'écran du PC.

3.1.5 Analyse énergétique

L'intérêt de cette analyse serait de trouver une relation entre le nombre d'instabilités n et la puissance $\mathcal{P}$ nécessaire à la formation des anneaux. L'idée est de démontrer que l'on peut obtenir rapidement des instabilités à faible puissance. Reprenons le travail de Saffman [20]. Son plus petit Reynolds du piston est de l'ordre de 10^4 , pour un rapport L/D égal à 1,4. Notre diamètre de sortie étant de l'ordre de 1,5 cm, la course du piston doit donc être de l'ordre de 2,1 cm, et la vitesse du piston, donnée selon Saffman par

$$U_p = \frac{Re \nu}{D},$$

de l'ordre de 10 m/s. La puissance nécessaire s'exprime ainsi :

$$\mathcal{P} = \frac{MLU_p}{\tau^2},$$

où τ est le temps caractéristique de montée du piston de masse M . $\tau = L/U_p = 2,1$ ms et $M = 15$ g. D'où $\mathcal{P} \approx 714$ W. Cette puissance semble démesurément grande face à notre dispositif (petit haut-parleur d'une dizaine de centimètres de diamètre seulement et d'une puissance nominale de 20 W).

3.2 Montage expérimental utilisé

Nous utilisons le montage de la figure 3.5 dont les caractéristiques sont les suivantes. Le piston est un disque de plexiglas d'épaisseur 1 mm actionné par un haut-parleur de puissance nominale 20 W et couissant à l'intérieur d'une cavité cylindrique de diamètre $D_p = 110$ mm

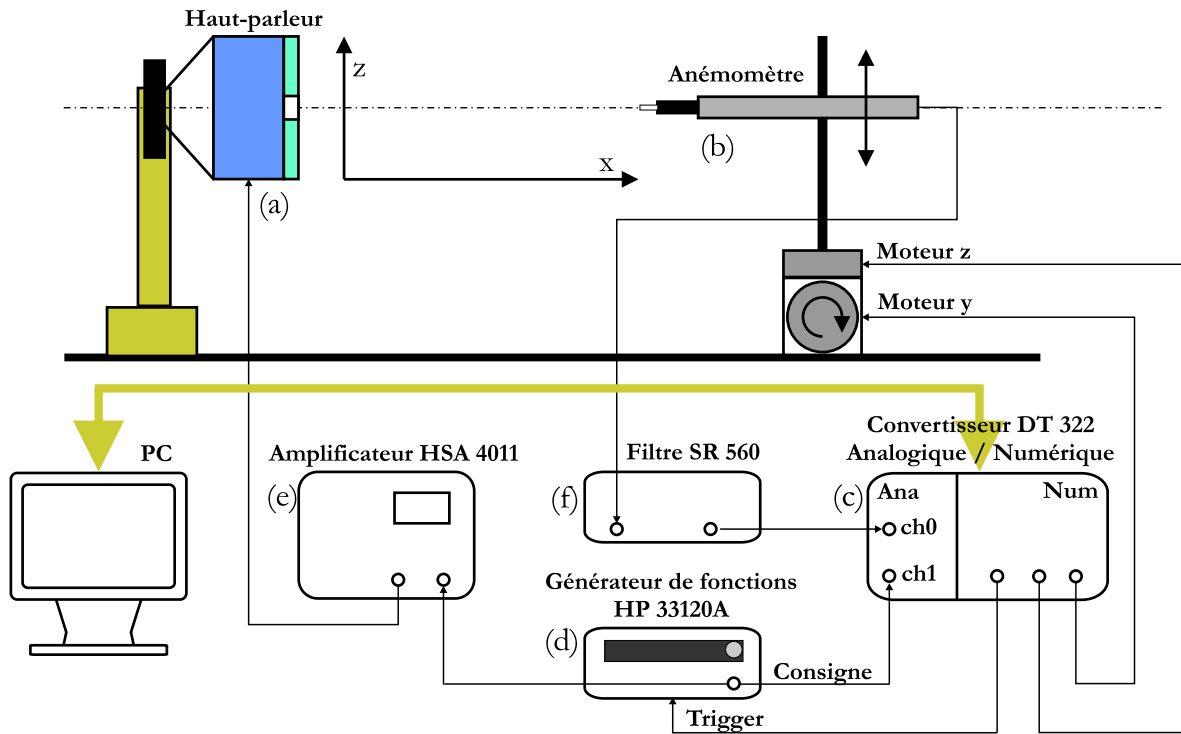


FIG. 3.5 – Montage expérimental utilisé. (a) Boîte cylindrique contenant un haut-parleur et un piston générant des anneaux de vorticité à travers un disque de plexiglas d'épaisseur e percé d'un orifice de diamètre D . (b) Anémomètre à fil chaud TSI 1201-20-39-39 entraîné selon les axes y et z par deux moteurs pas à pas. (c) Convertisseur analogique/numérique DT 322 enregistrant via une carte d'acquisition le signal filtré de l'anémomètre ainsi que la consigne imposée et commandant les deux moteurs. (d) Générateur de fonctions HP 33120A synchronisé par l'envoi d'un trigger du convertisseur. (e) Amplificateur HSA 4011 recevant la consigne du générateur de fonctions et alimentant le haut-parleur. (f) Filtre SR 560 appliqué au signal de sortie de l'anémomètre.

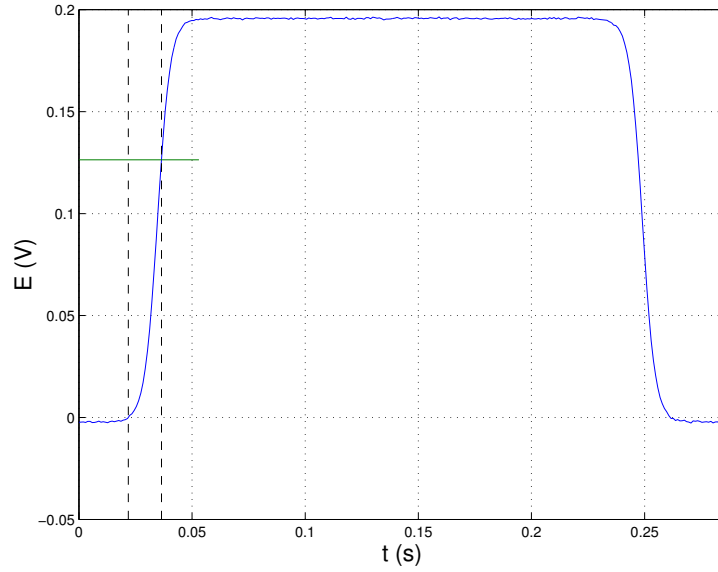


FIG. 3.6 – Signal de consigne envoyé vers l’amplificateur pour une fréquence $f = 3,5$ Hz. L’amplitude est de 200 mV et l’offset est réglé à 100 mV. Le temps de montée défini à 63,2 % de l’amplitude maximale est $\tau_m = 15,1$ ms.

remplie d’air initialement au repos. L’étanchéité entre le piston et le cylindre est assuré par un segment. La boîte cylindrique est fermée par un disque rigide de plexiglas d’épaisseur e au centre duquel se trouve un orifice parfaitement circulaire de diamètre D . L’anneau de vorticité généré à chaque impulsion du haut-parleur se déplace vers la droite selon l’axe des x . Il croise en $x = x_0$ le plan (y, z) balayé par un anémomètre à fil chaud pouvant coulisser selon les deux axes y et z grâce à deux moteurs pas à pas. L’anémomètre enregistre en chaque point un signal temporel avant de se positionner au point suivant. Le signal de sortie de l’anémomètre, la commande d’avancement des moteurs, ainsi que l’impulsion du haut-parleur sont centralisés au niveau d’un convertisseur analogique/numérique permettant une parfaite synchronisation des mesures. Au cours d’une expérience, le nombre d’anneaux émis est donc égal au nombre de mesures effectuées, mais le principe de répétabilité, ou d’ergodicité, permet de considérer que tous les signaux de sortie se rapportent à un seul et même anneau. Le haut-parleur et l’anémomètre sont disposés sur un rail permettant de faire varier la distance x_0 entre chaque série de mesures, le tout étant enfermé dans une enceinte parall  l  pip  dique assurant une bonne isolation entre l’écoulement expérimental et les mouvements turbulents de l’atmosphère de la pièce.

Nous mesurons donc la valeur absolue de la vitesse de l’air en un point x_0 grâce à une sonde TSI 1201-20-39-39 dont le diamètre du filament est de $50,8 \mu\text{m}$. La résolution de chaque mesure est inférieure à 2 mm et la réponse en fréquence est de l’ordre de 100 kHz. La sonde tient évidemment compte de la vitesse d’advection U_a qu’il faut retrancher afin d’accéder aux seules fluctuations engendrées par les instabilités. Une fois l’étalonnage effectué (voir annexe C), la sonde à fil chaud donne des résultats tout à fait acceptables (mesure quasi-punctuelle de la vitesse et réponse en fréquence très élevée).

Le signal de consigne est un signal de type tangente hyperbolique. Il est envoyé au haut-

Fréquence f (Hz)	Temps de montée τ_m (ms)
1	51,9
1,5	35,4
2	25,7
2,5	21,0
3	17,2
3,5	15,1
4	13,4
4,5	11,2
5	9,9
5,5	9,6
6	9,1
6,5	7,7
7	7,5
7,5	6,9

TAB. 3.1 – Table de correspondance entre la fréquence d’entrée f et le temps de montée τ_m du haut-parleur pour une plage de fréquences allant de 1 Hz à 7,5 Hz.

parleur depuis un générateur de fonction HP 33120A via un amplificateur HSA 4011. La figure 3.6 montre la consigne observée pour une fréquence de 3,5 Hz. Lors de la montée, le haut-parleur pousse le piston pendant un temps caractéristique τ_m , le piston poussant alors le fluide à travers l’orifice de sortie. C’est ce temps caractéristique qui a une réelle signification physique, la fréquence n’étant qu’un paramètre d’entrée du générateur de fonction. La table 3.1 et la figure 3.7 donnent l’équivalence entre la fréquence d’entrée f et le temps de montée τ_m du haut-parleur pour une plage de fréquences allant de 1 Hz à 7,5 Hz. Du fait de la géométrie du signal de consigne, le temps caractéristique de descente est sensiblement égal au temps caractéristique de montée τ_m .

Au moment de la descente, le haut-parleur, ainsi que le piston, reviennent à leur position initiale en aspirant de l’air par l’orifice de sortie. Il est donc nécessaire que l’anneau soit suffisamment loin du disque de sortie à cet instant précis (voir figure 3.16). Ainsi, à une distance $x_0 = 15$ cm du disque, pour un diamètre et une épaisseur de sortie respectivement égaux à 15 mm et 1,5 mm, cette condition reste valable sur une gamme de fréquence allant de 2 à 6,5 Hz. Dans une perspective de poursuite de l’étude, nous avons imaginé une consigne améliorée avec un temps de descente beaucoup plus lent que le temps de montée afin d’envisager des expérimentations à des fréquences plus hautes (voir annexe D).

L’énergie transmise par le système « haut-parleur + boîte cylindrique » à l’anneau est directement liée au temps de montée. C’est donc pour cette raison que pour des fréquences trop faibles, l’anneau n’est pas suffisamment énergétique pour adopter la même trajectoire à chaque mesure. Le principe de répétabilité n’est donc pas respecté et les résultats obtenus à l’issue de la série de mesures sont incohérents.

Le signal de sortie transmis par la sonde à fil chaud n’est pas directement enregistré par la carte d’acquisition. Il transite d’abord par un filtre SR 560 réglé à 12 dB/oct en mode passe-bas. La fréquence de coupure sélectionnée est $f_c = 300$ Hz afin de ne pas perdre les

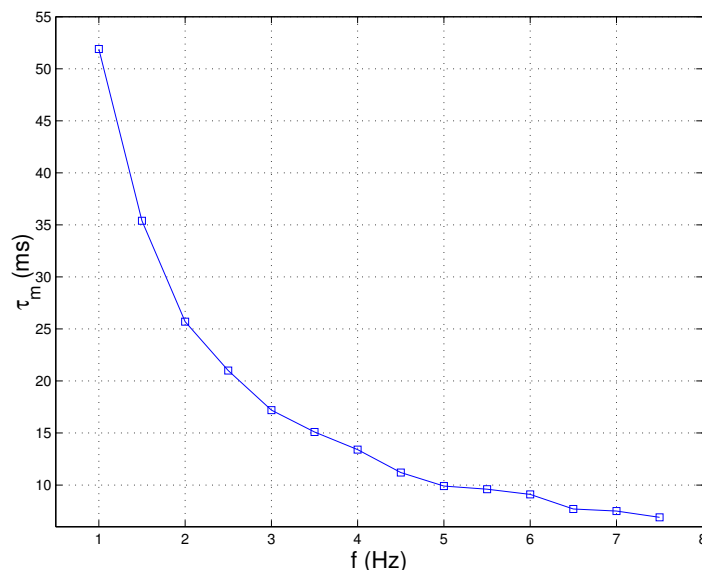


FIG. 3.7 – Évolution du temps de montée τ_m de la consigne en fonction de la fréquence f . Plage de fréquences : de 1 Hz à 7,5 Hz.

informations concernant les instabilités de l'anneau. En outre le filtre retranche au signal de sortie de l'anémomètre un offset de 1,7 V correspondant au seuil de fonctionnement de la sonde.

Enfin, le convertisseur Analogique/Numérique DT 322 joue le rôle du « cerveau » de l'expérience. Abritant la carte d'acquisition et relié au PC, il communique avec l'utilisateur via l'interface graphique de la figure 3.8 et transmet les données au disque dur. À chaque mesure, son fonctionnement est le suivant :

- deux entrées/sorties digitales commandent le déplacement des moteurs pas à pas d'un nombre de tours correspondant à une résolution spatiale que nous avons fixée à 0,49 mm sur l'axe z et 0,48 mm sur l'axe y ;
- deux sorties digitales envoient l'ordre au générateur de fonctions de délivrer la consigne et à la carte de débiter l'acquisition : la synchronisation est parfaite ;
- le signal filtré transmis par l'anémomètre est reçu sur un des canaux analogiques et échantillonné à la fréquence $f_e = 1024$ Hz avant d'être enregistré sur le disque dur du PC ;
- la procédure est répétée jusqu'à la fin de l'expérience.

Notons que le DT 322 nous permet aussi d'enregistrer la consigne délivrée par le générateur si besoin est.

Nous réalisons dans un premier temps toute une série de mesures avec les paramètres D et e fixés respectivement à 15 mm et 1,5 mm. Les paramètres variables sont donc, pour cette première série de mesures, le temps de montée τ_m et la distance d'acquisition x_0 .

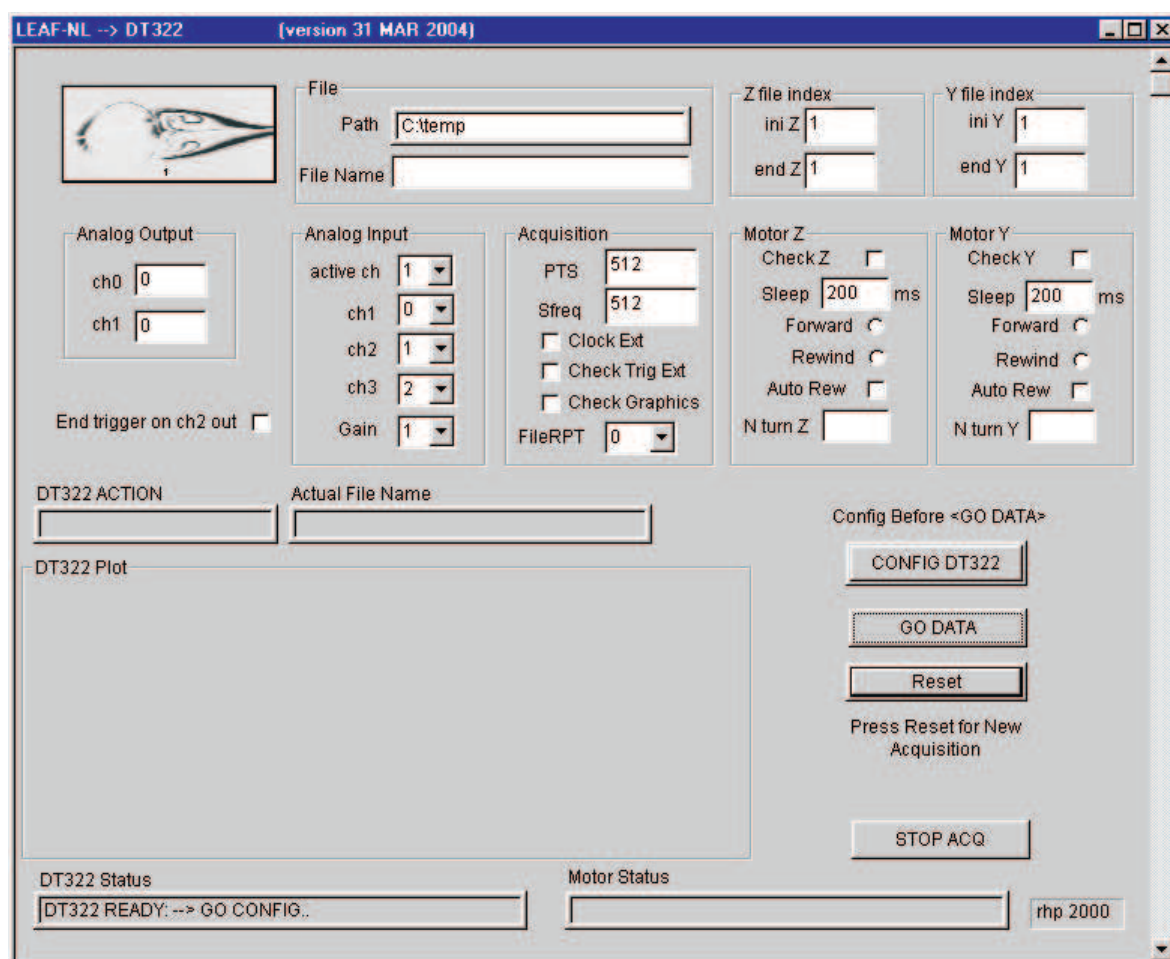


FIG. 3.8 – Interface graphique de la carte d'acquisition DT 322. L'interface permet de sélectionner le chemin d'enregistrement des données, la fréquence d'échantillonnage, le temps de mesure, l'offset, et le nombre d'entrées analogiques actives, ainsi que de programmer les deux moteurs pas à pas : nombre de mesures, nombre de tours et temps d'attente entre chaque mesure, fonctionnement avant ou arrière, et retour ou non des moteurs à la fin de chaque série de mesures selon l'un des axes.

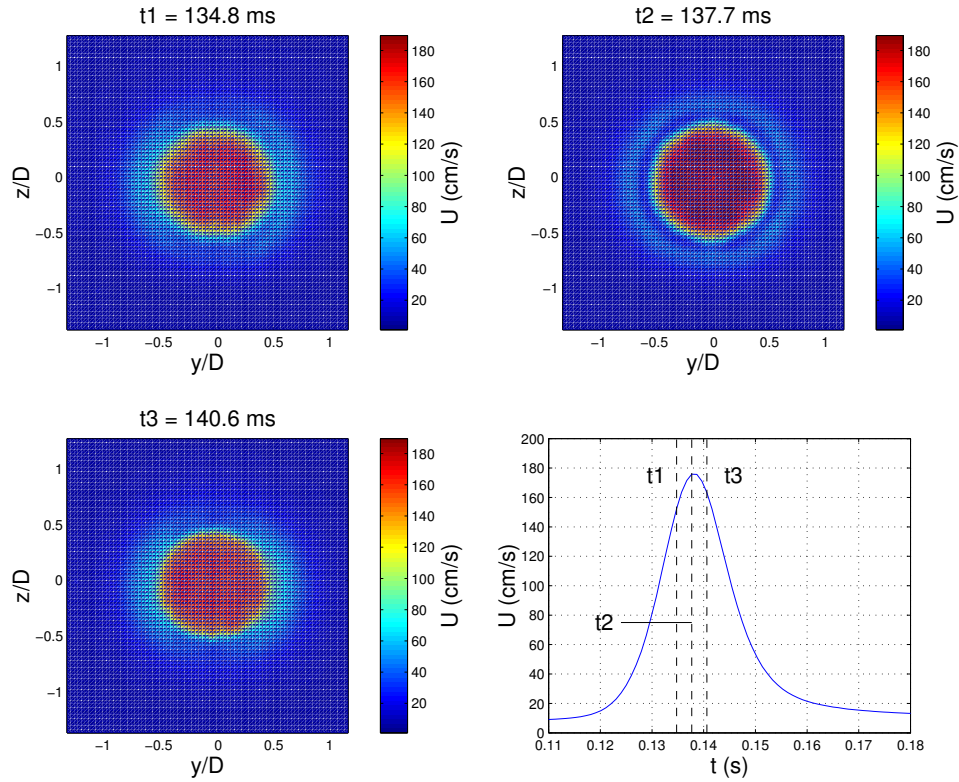


FIG. 3.9 – Évolution d'un anneau stable dans le temps. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 6,7$. Cartes des champs de vitesse absolue U dans le plan (y, z) à $t_1 = 134,8$ ms, $t_2 = 137,7$ ms, $t_3 = 140,6$ ms et signal temporel au centre de l'anneau. Temps de mesure égal à une seconde.

3.3 Observations et résultats

Nous montrons dans un premier temps les cartes et les profils de vitesse mesurés sur des anneaux stables et instables. Nous traçons ensuite les courbes d'évolution de la vitesse d'advection et de la circulation, et nous visualisons des isosurfaces de vitesse avant de discuter des modifications géométriques apportées au montage.

3.3.1 Cartes des champs de vitesse et profils

Anneau stable

On fixe la fréquence d'entrée f à 3,5 Hz ($\tau_m = 15,1$ ms) et la distance x_0 à 10 cm ($x_0/D = 6,7$). Traçons le signal temporel du point central de l'anneau. Les cartes du champ de vitesse absolue U observées à trois temps t différents (t_1 en amont du maximum de vitesse observé sur le signal temporel, t_2 au maximum, et t_3 en aval du maximum) laissent apparaître un anneau parfaitement circulaire (figure 3.9).

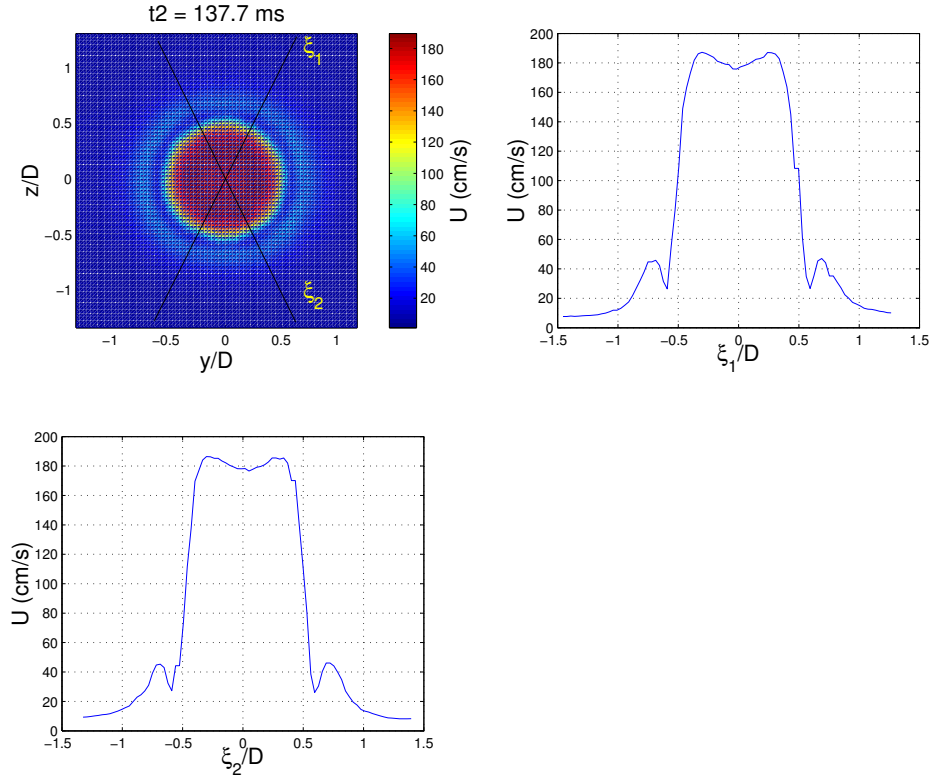


FIG. 3.10 – $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 6,7$. Carte du champ de vitesse absolue U d'un anneau stable observé dans le plan (y, z) à $t = t_2 = 137,7$ ms et profils de vitesse associés mesurés sur deux axes ξ_1 et ξ_2 passant par le centre de l'anneau.

Observons alors le profil de vitesse sur deux diamètres ξ_1 et ξ_2 à l'instant t_2 (figure 3.10). L'anneau étant stable, on retrouve l'allure du profil observé par Béchet [4] avec les paramètres suivant : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 21,0$ ms, $x_0/D = 7,3$. On note que le maximum de vitesse observé est de l'ordre de 185 cm/s sur un anneau créé avec un temps de montée égal à 15,1 ms contre 120 cm/s sur l'anneau de Béchet [4] créé avec un temps de montée égal à 21,0 ms pour des distances d'acquisition sensiblement proches ($6,7 D$ contre $7,3 D$). Notons également que nous retrouvons le profil de vitesse prévu par la simulation numérique effectuée sur un anneau stable de cœur épais à répartition de vorticité gaussienne.

Malgré des vitesses maximales élevées (de l'ordre de 185 cm/s), l'anneau observé est donc un anneau stable. Deux options s'offrent alors à nous pour observer un anneau instable : diminuer le temps de montée τ_m du haut-parleur (ce qui revient à augmenter la fréquence d'entrée du générateur de fonctions) ou augmenter la distance d'acquisition x_0 . Le résultat des observations réalisées pour un diamètre et une épaisseur de sortie respectivement égaux à $D = 15$ mm et $e = 1,5$ mm est consigné dans le tableau 3.2.

	$\tau_m = 7,7$ ms	$\tau_m = 9,6$ ms	$\tau_m = 11,2$ ms
$x_0/D = 6,7$	instable	stable	stable
$x_0/D = 8,7$	–	–	–
$x_0/D = 10$	instable	instable	instable
$x_0/D = 11,3$	–	–	–
$x_0/D = 13,3$	–	–	–

	$\tau_m = 15,1$ ms	$\tau_m = 25,7$ ms	$\tau_m = 51,9$ ms
$x_0/D = 6,7$	stable	–	–
$x_0/D = 8,7$	stable $\rightarrow$ instable	–	–
$x_0/D = 10$	instable	stable	trop peu énergétique
$x_0/D = 11,3$	instable $\rightarrow$ turbulent	–	–
$x_0/D = 13,3$	turbulent	–	–

TAB. 3.2 – Récapitulatif des expériences menées pour un diamètre et une épaisseur de sortie respectivement égaux à $D = 15$ mm et $e = 1,5$ mm. Toutes les instabilités observées sont des instabilités $n = 6$.

Anneau instable

Nous décidons maintenant de fixer le temps de montée à $\tau_m = 15,1$ ms et de faire varier le paramètre x_0 . La série d'acquisition nous donne une matrice cubique dont les trois dimensions correspondent à l'axe z , l'axe y , et le temps t . On a donc accès aux variations spatiales dans le plan (y, z) et temporelles du champ de vitesse absolue U de l'anneau. Par la suite, on transformera la dimension temporelle en dimension spatiale selon l'axe des x en divisant le temps t par la vitesse d'advection U_a . On extraira également les profils de vitesse selon un axe donné passant par le centre de l'anneau.

Les cartes des champs de vitesse montrent bien l'instabilité $n = 6$ et l'évolution de cette instabilité dans le temps (figure 3.11) pour trois temps t différents. L'analyse des trois images de la figure 3.11 nous renseigne sur l'ondulation de l'instabilité. Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 associent à chaque carte du champ de vitesse le profil de vitesse de trois axes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 passant par le centre de l'anneau. À $t_2 = 196,3$ ms, on retrouve le profil caractéristique déjà observé pour un anneau stable et prévu par la numérisation : il comporte les deux minimas locaux, la croissance gaussienne entre ces minimas et les maximas, et le creux entre les deux maximas.

Enfin, la figure 3.15 trace les signaux temporels de l'anneau instable en différents points de l'anneau. On note que le signal temporel du centre de l'anneau n'est pas celui correspondant à la vitesse maximale. En effet, les zones de vitesse maximale sont situées à l'intérieur de l'anneau et apparaissent au passage de l'instabilité. Par ailleurs, les points situés en périphérie de l'anneau ont une vitesse beaucoup plus faible. Cette dernière augmente cependant au passage de l'instabilité, comme le montre le signal temporel du point n° 1 de la figure 3.15.

Toutes ces observations nous permettent de comprendre que les instabilités tournent autour de la ligne centrale du cœur de l'anneau mais ne tournent pas autour du centre de l'anneau.

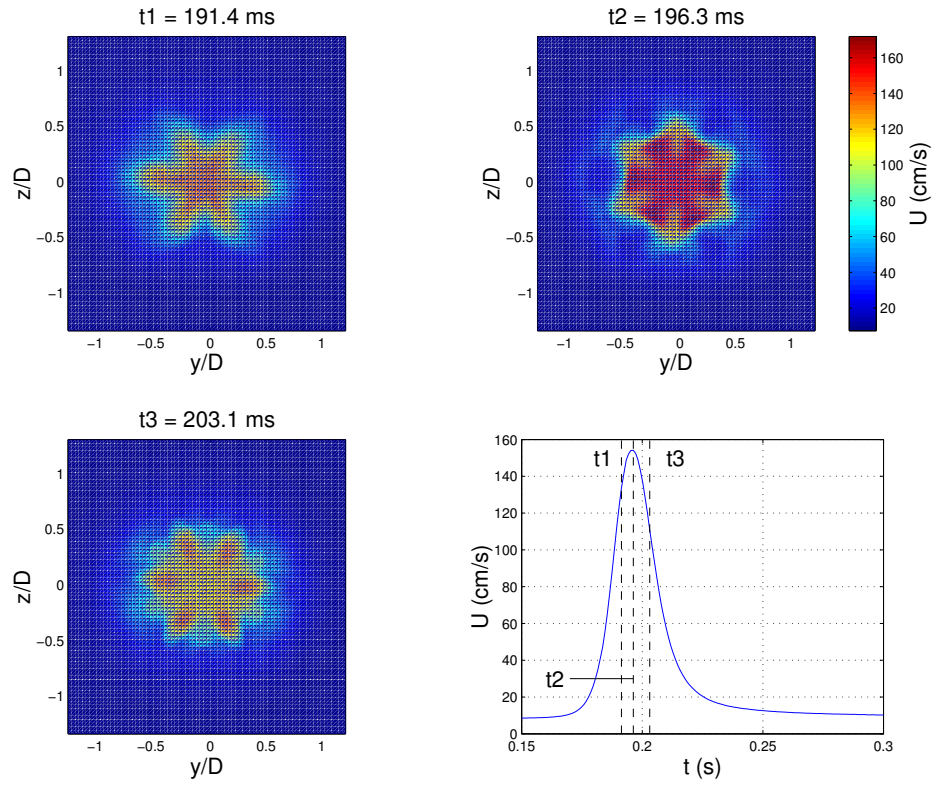


FIG. 3.11 – Évolution d'un anneau instable dans le temps. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Cartes des champs de vitesse absolue U dans le plan (y, z) à $t_1 = 191,4$ ms, $t_2 = 196,3$ ms, $t_3 = 203,1$ ms et signal temporel au centre de l'anneau. Temps de mesure égal à une seconde. Nombre d'instabilités observées : $n = 6$

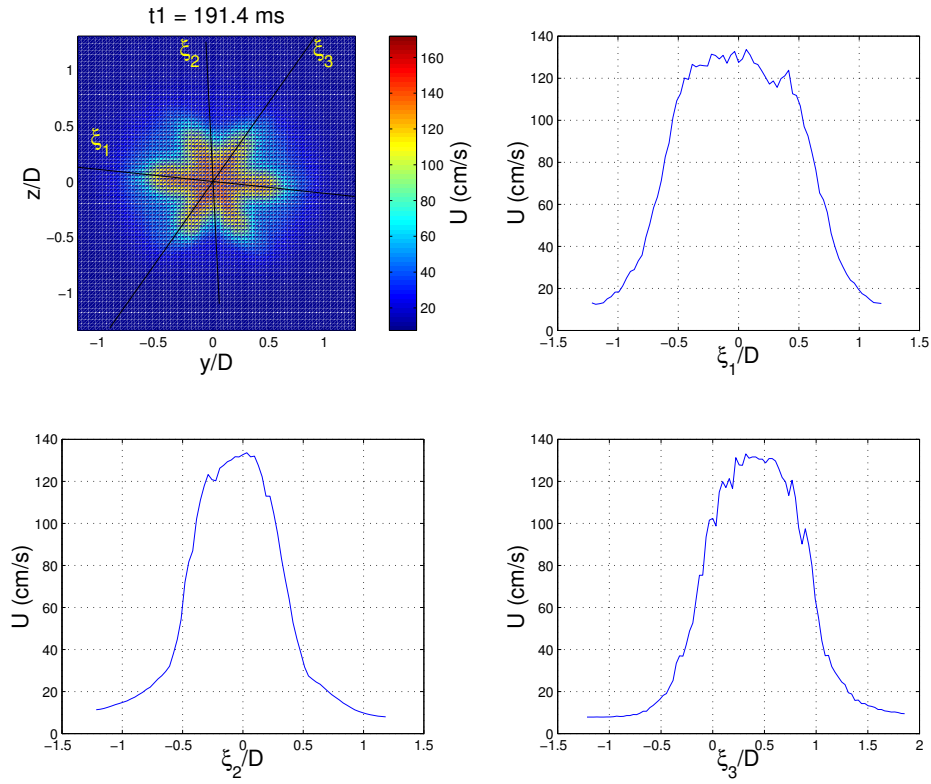


FIG. 3.12 – $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Carte du champ de vitesse absolue U d'un anneau instable observé dans le plan (y, z) à $t = t_1 = 191,4$ ms et profils de vitesse associés mesurés sur trois axes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 passant par le centre de l'anneau. Ces profils de vitesse montrent simplement qu'à $t_1 = 191,4$ ms, les régions de vitesse maximale sont concentrées à l'intérieur de l'anneau.

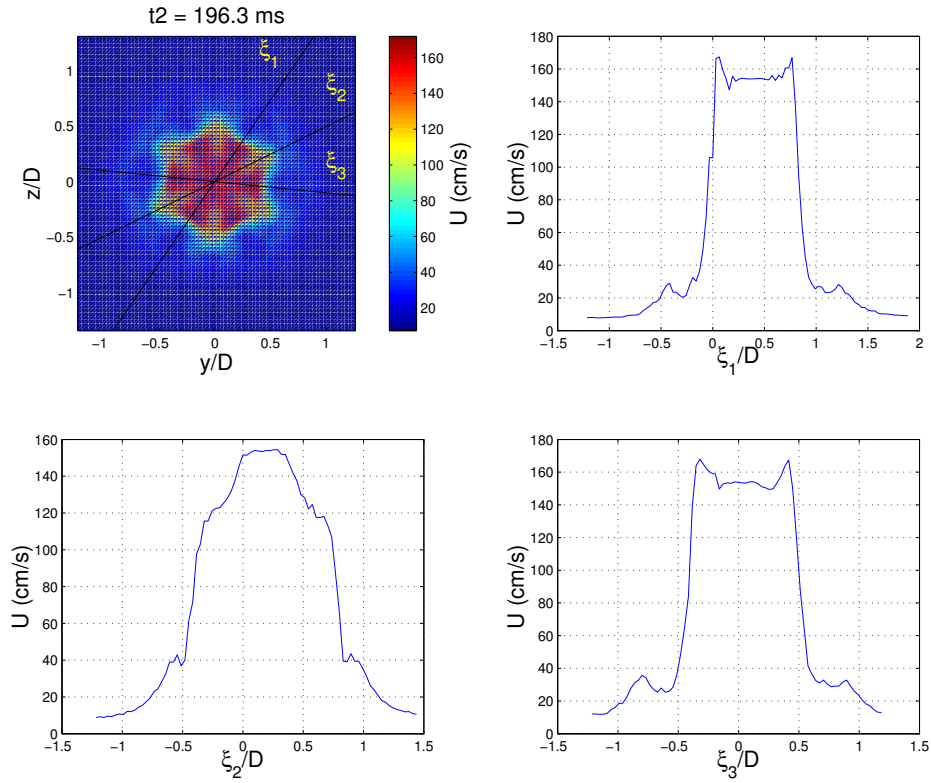


FIG. 3.13 – $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Carte du champ de vitesse absolue U d'un anneau instable observé dans le plan (y, z) à $t = t_2 = 196,3$ ms et profils de vitesse associés mesurés sur trois axes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 passant par le centre de l'anneau. On retrouve les profils déjà observés pour un anneau stable, avec cependant un creux entre les maxima de vitesse beaucoup plus marqué.

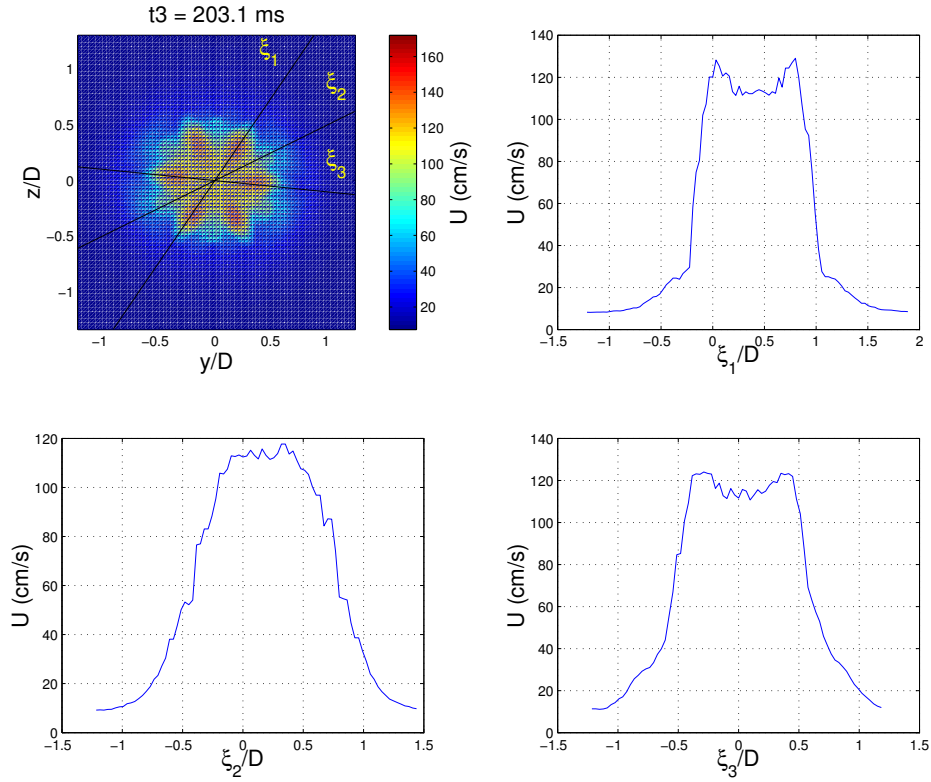


FIG. 3.14 – $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Carte du champ de vitesse absolue U d'un anneau instable observé dans le plan (y, z) à $t = t_3 = 203,1$ ms et profils de vitesse associés mesurés sur trois axes ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 passant par le centre de l'anneau. À $t_3 = 203,1$ ms, l'anneau est en « fin de passage », la vitesse diminue donc progressivement et la carte du champ de vitesse de l'anneau s'estompe pour ne laisser que les zones perturbées par le sillage de l'anneau.

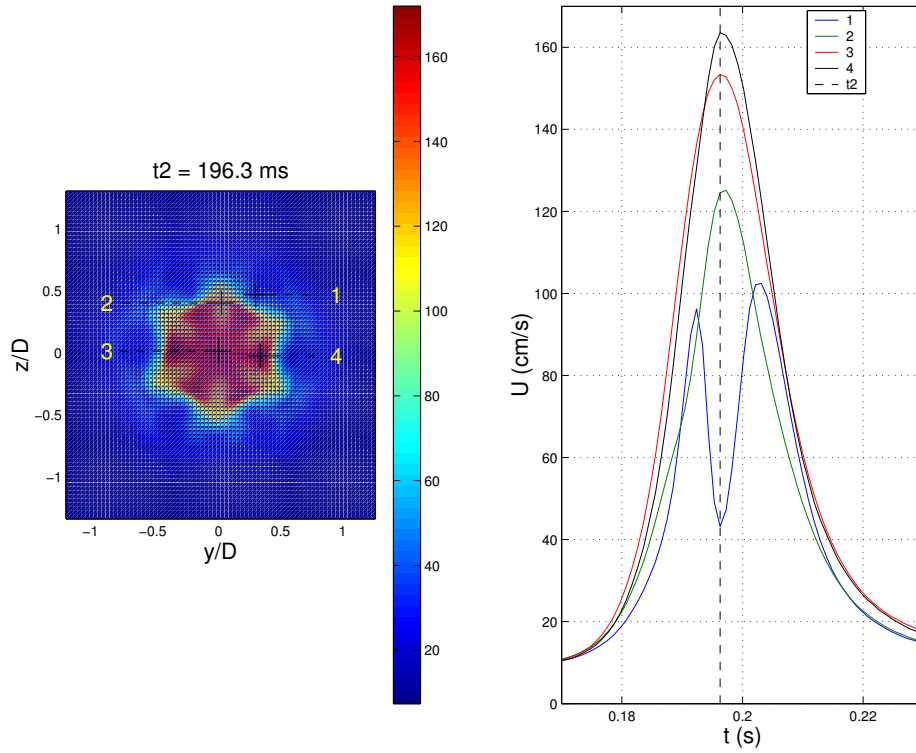


FIG. 3.15 – Signaux temporels d'un anneau instable. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Carte du champ de vitesse absolue U dans le plan (y, z) et signaux temporels en différents points de l'anneau. 1 : zone de basse vitesse extérieure à l'anneau et perturbée par le passage de l'instabilité ; 2 : zone stable en périphérie de l'anneau ; 3 : centre géométrique de l'anneau ; 4 : zone de haute vitesse intérieure à l'anneau et perturbée par le passage de l'instabilité.

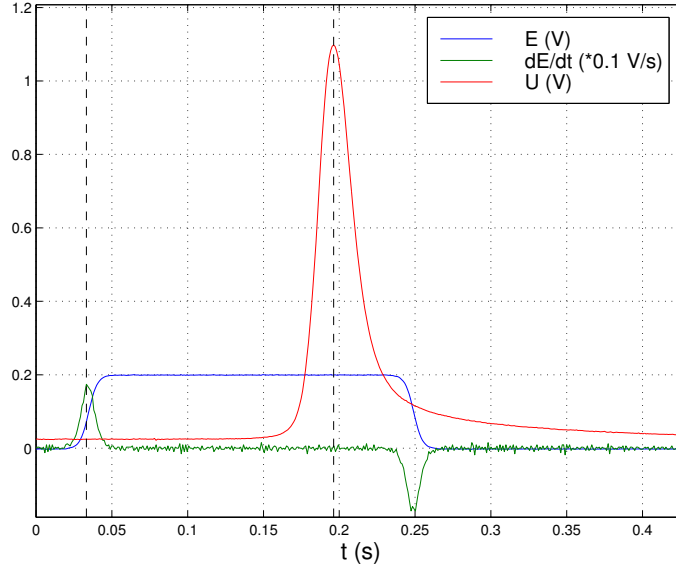


FIG. 3.16 – En bleu, le signal de consigne envoyé pour une fréquence $f = 3,5$ Hz ($\tau_m = 15,1$ ms). En vert, la dérivée du signal de consigne. En rouge, la réponse non-filtrée de l'anémomètre pour une mesure effectuée au centre d'un anneau de vorticité à $x_0 = 15$ cm du disque de sortie. La vitesse d'advection est obtenue en divisant la distance d'acquisition x_0 par le temps de vol t_{vol} de l'anneau. t_{vol} est le temps compris entre les deux droites verticales en pointillés. $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm. Cette figure permet aussi de vérifier que le retour du piston n'affecte pas la mesure de vitesse.

3.3.2 Vitesse d'advection U_a

Pour évaluer la vitesse d'advection, nous prenons pour chaque anneau le signal temporel de son centre. Nous définissons le temps de vol t_{vol} de l'anneau comme le temps qu'il parcourt entre sa sortie de la boîte cylindrique et la mesure par l'an  m  tre à fil chaud du maximum de vitesse absolue U du point situé exactement au centre de l'anneau. Pour ce faire, nous partons du principe que l'anneau commence à « s'échapper » de la boîte cylindrique au moment où la dérivée première de la consigne est maximale (voir figure 3.16). Nous déterminons le centre des anneaux géométriquement à l'aide de Matlab à partir des cartes de champs de vitesse. Ainsi, le point n   3 de la figure 3.15 correspond au centre géométrique d'un anneau instable observé pour les paramètres suivants : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. On obtient la vitesse d'advection en divisant la distance x_0 de mesure du champ de vitesse par le temps de vol mesuré, soit :

$$U_a = \frac{x_0}{t_{vol}}.$$

En répétant cette opération, on peut obtenir les courbes donnant la vitesse d'advection U_a en fonction du temps de montée τ_m à une distance x_0 fixée (figure 3.17). On remarque que U_a décroît linéairement avec τ_m et que les pentes observées pour deux distances d'acquisition différentes sont égales. En effet, U_a est directement liée à la vitesse moyenne du piston définie

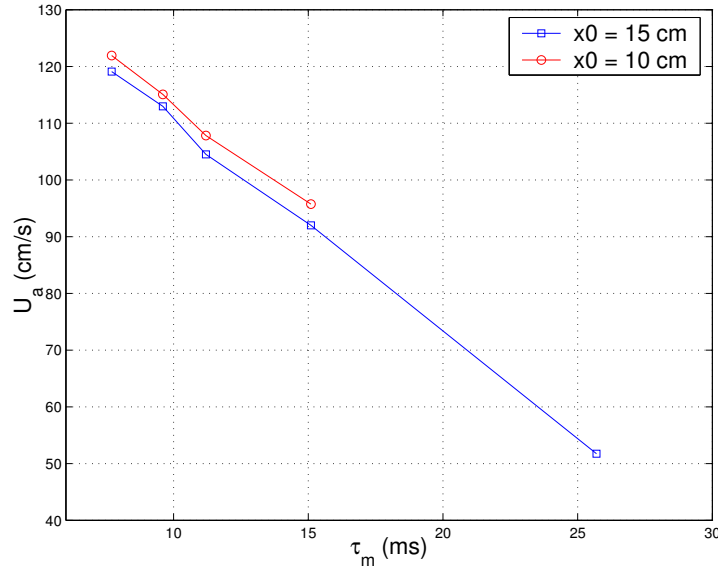


FIG. 3.17 – Variation de la vitesse d’advection U_a avec le temps de montée τ_m . Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $x_0 = 15$ cm (en bleu), $x_0 = 10$ cm (en rouge), soit respectivement $x_0/D = 10$ et $x_0/D = 6,7$.

par

$$U_p = \frac{L}{\tau_m},$$

où L représente la distance parcourue par le piston au moment de la formation de l’anneau. Cette distance est fixée par l’amplitude de la consigne, elle ne varie donc pas d’une fréquence à l’autre. On peut ainsi affirmer que le seul paramètre contrôlant la vitesse du piston ainsi que la vitesse d’advection de l’anneau est le temps de montée τ_m .

Afin de savoir si la vitesse d’advection évolue sensiblement avec la distance, on décide de tracer également la courbe donnant U_a en fonction de la distance adimensionnée x_0/D pour un temps de montée τ_m fixé à 15,1 ms (figure 3.18). La variation observée est due aux dissipations d’énergie par effets visqueux. On compare la variation de la vitesse d’advection avec la variation de la vitesse maximale. La décroissance de la courbe de vitesse maximale est plus grande, avec notamment une rupture de pente entre $x_0/D = 10$ et $x_0/D = 11,3$ correspondant à la transition d’un anneau instable vers un anneau turbulent (voir tableau 3.2).

3.3.3 Circulation

La circulation totale Γ d’un anneau de vorticité est une de ses grandeurs caractéristiques. La variation de la circulation est étroitement liée à la répartition de la vorticité dans l’anneau. D’après Maxworthy [18], cette dernière est distribuée dans une bulle de fluide plus large que l’anneau et se dissipe au cours du temps dans cette couche de fluide environnant. L’anneau en mouvement génère de plus un sillage qui récupère une partie de cette vorticité, faisant ainsi décroître la circulation Γ avec le temps (figure 3.19).

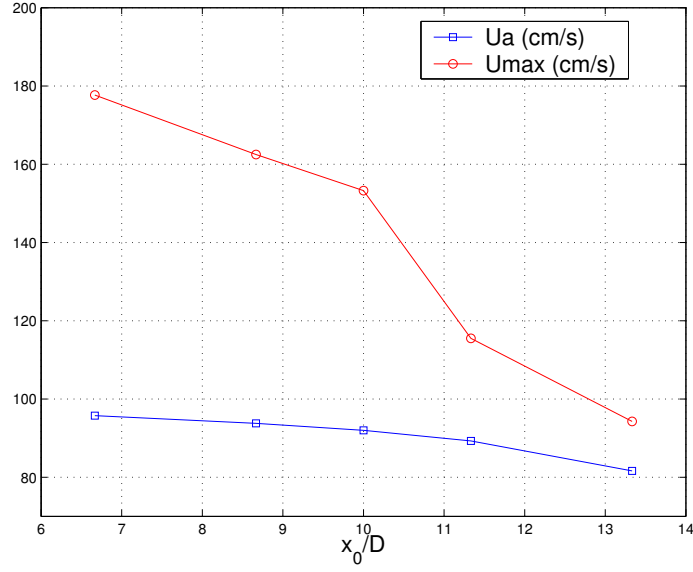


FIG. 3.18 – Variation de la vitesse d’advection U_a (courbe bleue) et de la vitesse maximale U_{max} (courbe rouge) avec la distance d’acquisition adimensionnée x_0/D . Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, et $\tau_m = 15,1$ ms. La rupture de pente sur la courbe U_{max} correspond à la l’apparition de la turbulence.

La circulation Γ se calcule en intégrant la vitesse locale $U_i = U - U_a$ le long d’une courbe fermée C passant par le centre de l’anneau (voir figure 3.19). On a donc :

$$\Gamma = \int_1 U_1 \cdot dx + \int_2 U_2 \cdot dy - \int_3 U_3 \cdot dx - \int_4 U_4 \cdot dy,$$

où

$$\int_2 U_2 \cdot dy - \int_4 U_4 \cdot dy = 0$$

et $U_3 = 0$ suffisamment loin de l’anneau. Il reste donc à calculer

$$\Gamma = \int_1 U_1 \cdot dx,$$

ce qui revient à estimer l’aire située sous la courbe $U_1 = f(x)$ du centre de l’anneau. Ne disposant que du signal temporel de la vitesse au centre de l’anneau, on se ramène à un signal spatial en divisant ce dernier par la vitesse d’advection U_a estimé en sous-section précédente.

Prenons quatre temps de montée τ_m distincts caractéristiques de quatre anneaux de vorticité distincts et effectuons pour chacun d’entre eux une mesure à $x_0 = 10$ cm et et une mesure à $x_0 = 15$ cm (soit respectivement $x_0/D = 6,7$ et $x_0/D = 10$). Le calcul de la circulation s’effectue alors en quatre phases :

1. tracé de la carte des champs de vitesse et détermination du centre ;
2. calcul du temps de vol t_{vol} comme indiqué dans la sous-section 3.3.2 et déduction de la vitesse d’advection U_a ;
3. multiplication du signal temporel du point central par U_a afin d’obtenir un signal spatial ;

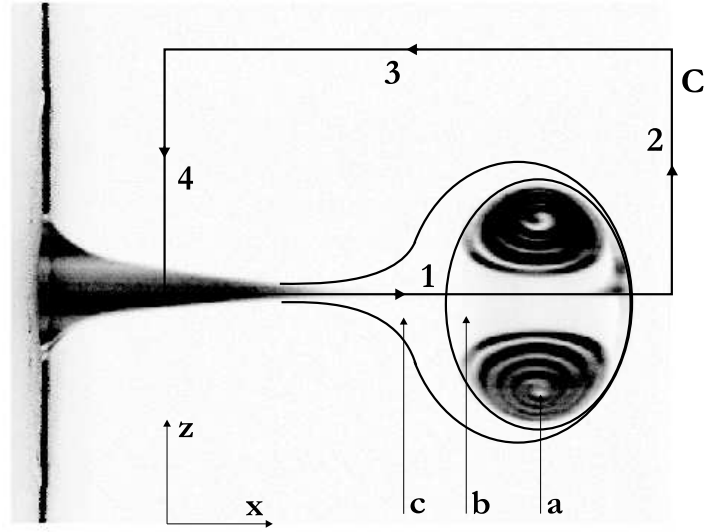


FIG. 3.19 – Structure de l’anneau en phase laminaire dans le plan (x, z) . (a) : Cœur de l’anneau. (b) : Première zone de diffusion de la vorticité. (c) : Deuxième zone de diffusion : la vorticité est récupérée par le sillage. C est la courbe d’intégration de la vitesse pour le calcul de la circulation Γ .

4. intégration de la vitesse sur ce signal.

On obtient ainsi l’évolution de Γ en fonction de la vitesse d’advection U_a (figure 3.20) ainsi que l’évolution de Γ en fonction du temps de vol pour chacun des anneaux générés (figure 3.21). La courbe donnant la circulation en fonction de la vitesse d’advection montre que Γ évolue linéairement avec U_a , avec une pente qui semble être la même pour les deux distances d’acquisition différentes. Si l’on considère que U_a est de l’ordre de $\Gamma/4\pi R$ (voir section A.2.2), on peut donc écrire que $\Gamma = \alpha R$, où α représente la pente des deux courbes (a) et (b) de la figure 3.20. Cela signifie que dans ce cas, le rayon de l’anneau R ne change pas avec l’énergie fournie à l’anneau. Cette considération est à relier avec la courbe de la figure 3.28.

3.3.4 Visualisation tridimensionnelle des isosurfaces de vitesse

Comme nous l’avons déjà indiqué plus haut, nous obtenons pour chaque anneau une matrice cubique contenant tous les signaux temporels d’un morceau de plan encadrant l’anneau mesuré. Chaque point de la matrice nous donne une information sur la vitesse absolue de l’anneau en un point précis de ce plan à un temps donné. La phase de formation de l’anneau est terminé lorsque celui-ci atteint l’anémomètre. On peut donc considérer que ses grandeurs géométriques ne varient presque pas pendant le temps de mesure hormis peut-être les instabilités dans le cas d’un anneau instable.

Nous avons alors l’idée de retrouver l’épaisseur de l’anneau en multipliant le temps de mesure par la vitesse d’advection U_a . Nous avons alors accès à une représentation tridimensionnelle de l’anneau. Gr ce   Matlab, nous visualisons les isosurfaces de vitesse afin de comprendre comment sont réparties les zones de basse et de haute vitesse au sein de la

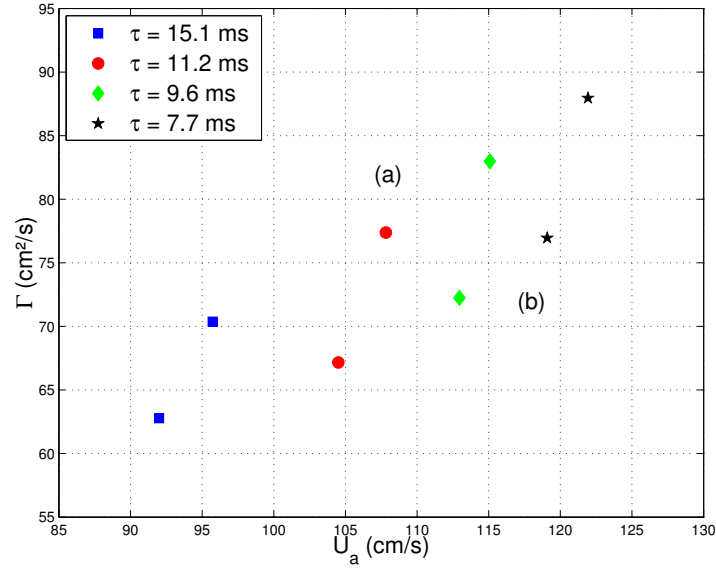


FIG. 3.20 – Évolution de la circulation Γ en fonction de la vitesse d'advection U_a pour des anneaux de vorticité caractérisés par quatre temps caractéristiques de montée τ_m différents. Les deux courbes obtenues correspondent à deux distances de mesures adimensionnées : $x_0/D = 6,7$ (a) et $x_0/D = 10$ (b).

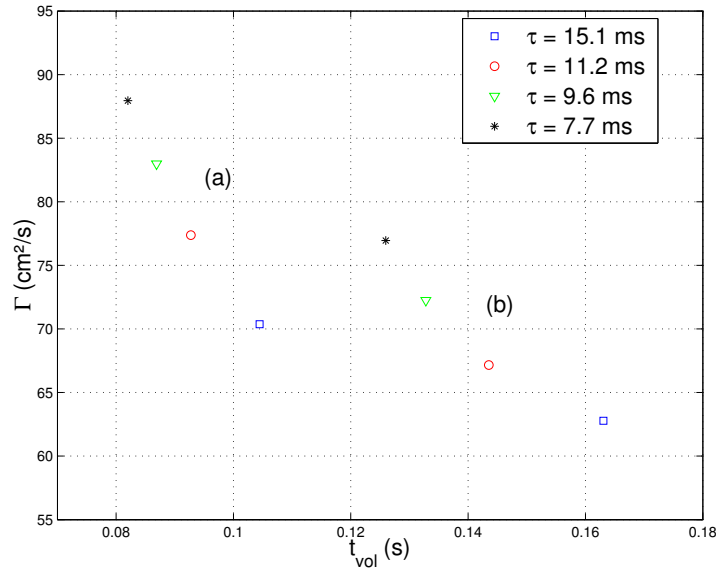


FIG. 3.21 –  volution de la circulation Γ en fonction du temps de vol t_{vol} pour des anneaux de vorticité caractérisés par quatre temps caractéristiques de montée τ_m différents. Le temps de vol t_{vol} est obtenu ici en divisant la distance x_0 d'acquisition par la vitesse d'advection U_a estimée précédemment. Les deux courbes obtenues correspondent à deux distances de mesures adimensionnées : $x_0/D = 6,7$ (a) et $x_0/D = 10$ (b).

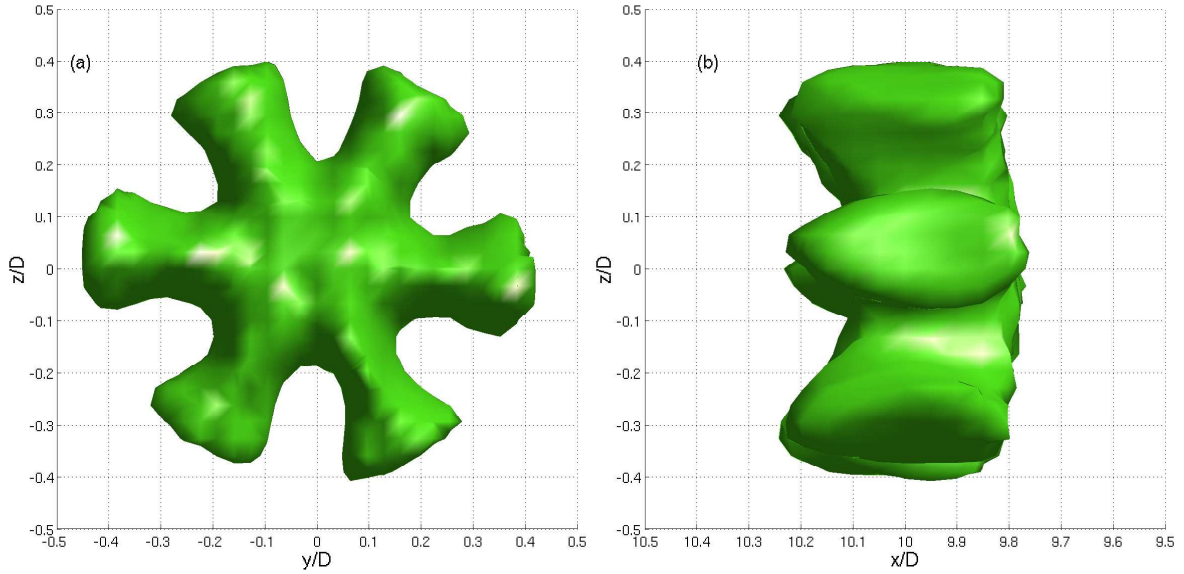


FIG. 3.22 – Isosurface de vitesse d'un anneau instable ($n = 6$). Vue de face et vue de côté. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Isosurface $U = 145$ m/s, soit 84,38 % de la vitesse maximale. Les axes y et z sont adimensionnés par le diamètre de sortie D . L'axe spatial x est obtenu en multipliant le temps de mesure par la vitesse d'advection U_a de l'anneau.

structure.

Dans le cas d'un anneau instable, la figure 3.22 nous montre ce que nous pouvons obtenir avec un tel processus pour un anneau dont les paramètres sont les suivants : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms et $x_0/D = 10$. Le nombre d'instabilités observées est $n = 6$ réparties symétriquement autour du centre de l'anneau. L'isosurface représentée ($U = 145$ cm/s) met en évidence les zones instables qui apparaissent ici sous formes d'ailes s'éloignant du centre. La vue de côté rend compte du retard de l'instabilité sur le reste de l'anneau. En effet, les « ailes » représentant les instabilités sont décalées vers l'arrière. L'épaisseur matérielle observée est de l'ordre de $0,4 \cdot D$.

Dans le cas d'un anneau stable, regardons maintenant la figure 3.23 et observons les deux isosurfaces $U = 95$ cm/s et $U = 180$ cm/s d'un anneau dont les paramètres sont : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 6,7$. Dans ce cas, nous pouvons comparer la localisation des zones de haute et de basse vitesse. Les basses vitesses sont présentes dans tout l'anneau alors que les hautes vitesses sont concentrées à l'intérieur de l'anneau, à l'exclusion toutefois du centre. Notons également que la largeur de l'isosurface $U = 180$ cm/s est très faible en comparaison à la largeur de l'isosurface $U = 95$ cm/s.

Cette visualisation de plusieurs isosurfaces de vitesse sur un anneau stable nous pousse à faire de même avec un anneau instable. C'est ce que nous montre la figure 3.24, avec les mêmes paramètres que l'anneau de la figure 3.22.

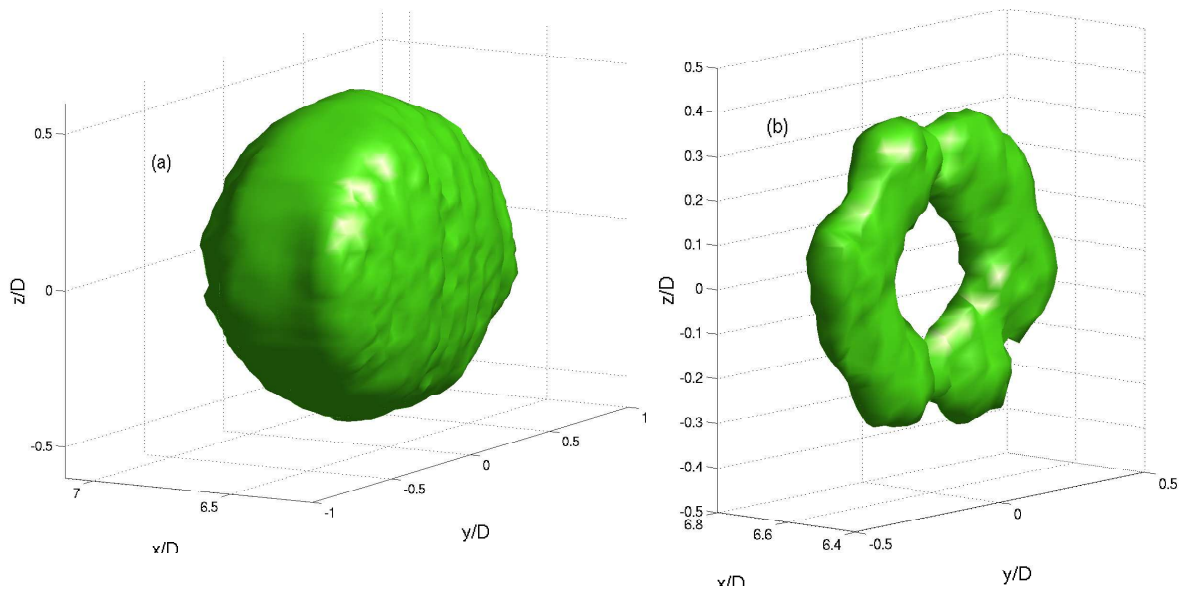


FIG. 3.23 – Tracé des isosurfaces de vitesse d'un anneau stable. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 6,7$. (a) : Isosurface $U = 95$ cm/s, soit 50,11 % de la vitesse maximale. (b) : Isosurface $U = 180$ cm/s, soit 94,95 % de la vitesse maximale. Bien que l'anneau soit stable, la zone de haute vitesse, répartie circulairement à l'intérieur de l'anneau, laisse apparaître les prémices d'une instabilité $n = 6$. Les basses vitesses sont présentes dans tout l'anneau ainsi que dans le début du sillage.

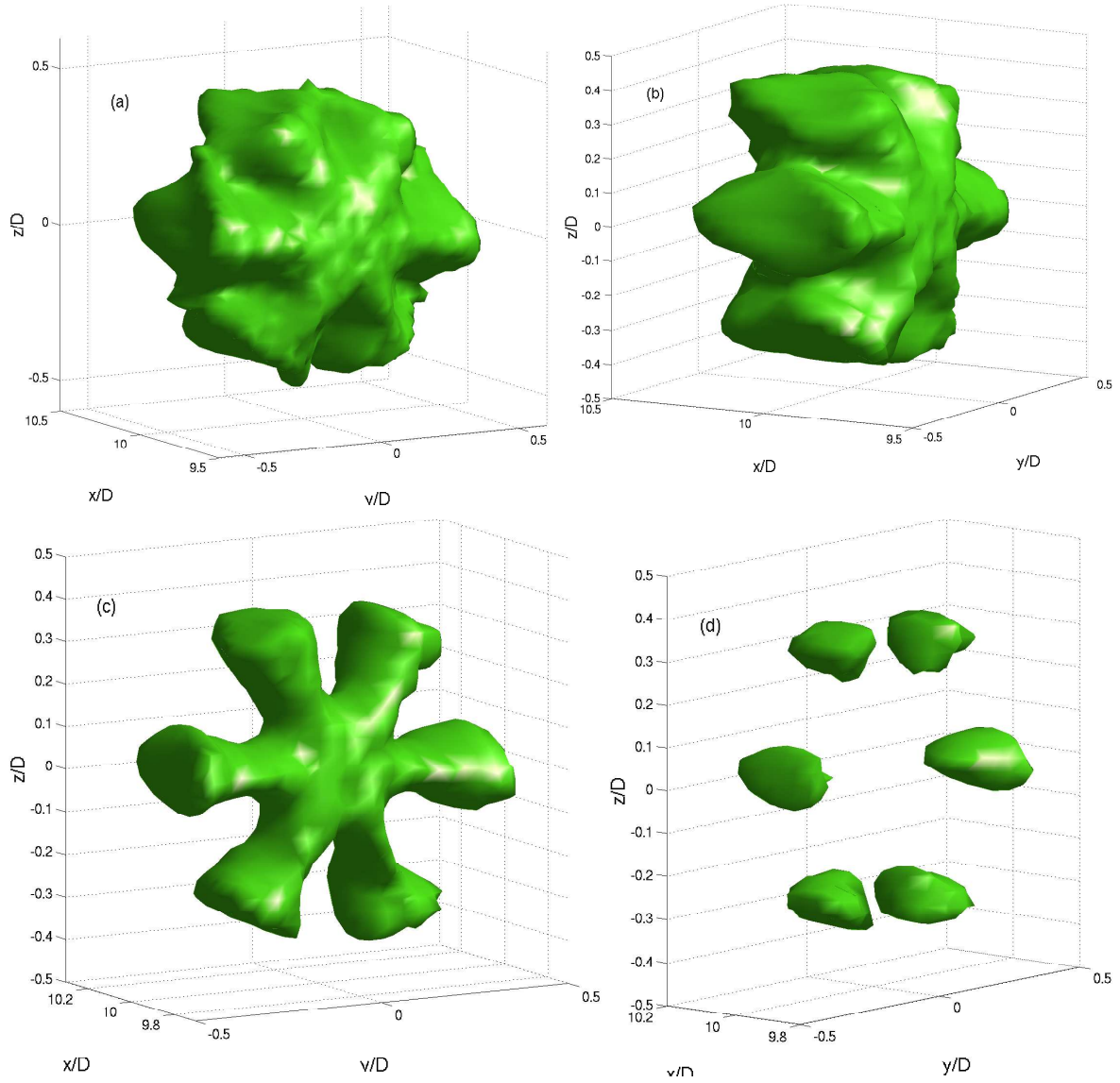


FIG. 3.24 – Tracé des isosurfaces de vitesse d'un anneau instable. Paramètres : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, $x_0/D = 10$. Isosurfaces $U = 120$ cm/s (a), $U = 130$ cm/s (b), $U = 150$ cm/s (c) et $U = 160$ cm/s (d), soit respectivement 69,83 %, 75,65 %, 87,29 % et 93,10 % de la vitesse maximale. Les zones de haute vitesse sont concentrées dans les « ailes » des instabilités.

$D(mm)$	$\tau_m(ms)$	$x_0(cm)$	x_0/D	n
17	11,2	20	11,8	5
15	11,2	15	10	6
20	11,2	15	7,5	8

TAB. 3.3 – Récapitulatif des expériences effectuées pour l’observation de nombres d’instabilités n différents.

3.3.5 Évolution des instabilités

On utilise les visualisations d’une isosurface de vitesse correspondant à un certain pourcentage de la vitesse maximale pour rendre compte de l’évolution des instabilités avec la distance x_0 . La figure 3.25 permet ainsi de rendre compte du développement des instabilités jusqu’à l’apparition de la turbulence. En effet, à $x_0/D = 8,7$, les ailes déjà observées sur l’anneau instable précédent ne sont pas très développées. Elles grandissent progressivement et sont bien observables à $x_0/D = 10$. À $x_0/D = 11,3$, un trouble apparaît : c’est le début de la transition vers la turbulence. Enfin, à $x_0/D = 13,3$, l’anneau est complètement turbulent et les instabilités sont noyées dans cette turbulence.

3.3.6 Modification du diamètre de sortie

Tous les résultats précédents ont été obtenus avec un diamètre de sortie $D = 15$ mm et une épaisseur de disque $e = 1,5$ mm. Nous n’observons pas dans ce travail les effets dus au changement de l’épaisseur. Par contre nous obtenons des nombres d’instabilités différents en modifiant D à 17 mm puis à 20 mm pour une épaisseur e toujours égale à 1,5 mm.

La figure 3.26 montre les cartes du champ de vitesse pour des anneaux possédant un nombre n d’instabilités égal à 5, 6 et 8. Ces trois anneaux sont obtenus avec des disques présentant un diamètre de sortie D respectivement égal à 17 mm, 15 mm et 20 mm. Les temps de montée dans les trois expériences sont identiques ($\tau_m = 11,2$). Les distances d’acquisition x_0 sont égales à 15 cm pour les anneaux à 6 et 8 instabilités. L’anneau présentant 5 instabilités était stable à 15 cm ; nous avons donc réglé sa distance d’acquisition à 20 cm. Le tableau 3.3 consigne tous ces paramètres.

La figure 3.27 vient en complément de la figure 3.26. Elle correspond aux mêmes observations et donne les isosurfaces de vitesse $U = 0,9 \cdot U_{max}$.

Nous terminerons ce chapitre en traçant la taille et la longueur d’onde caractéristique des trois anneaux observés en fonction du nombre de Reynolds. Nous appelons taille caractéristique la distance D^* entre les minimaux locaux des profils de vitesse de chaque anneau au temps t_{max} correspondant au développement maximum des instabilités. (C’est-à-dire que la tranche de la matrice cubique à t_{max} contient la vitesse maximale de l’anneau U_{max}). Dans le cas d’un vortex de Lamb-Oseen, cette distance correspond exactement à la distance entre les centres des deux vortex contrarotatifs. Dans notre cas, on ne peut l’assimiler au diamètre de l’anneau à cause de la contribution des trois dimensions. D^* est cependant une grandeur proche du diamètre de sortie D , c’est donc bien une taille caractéristique de l’anneau.

Traçons dans un premier temps l’évolution de D^*/D en fonction du temps de montée τ_m pour deux distances d’acquisition différentes (figure 3.28). Nous nous apercevons que la taille

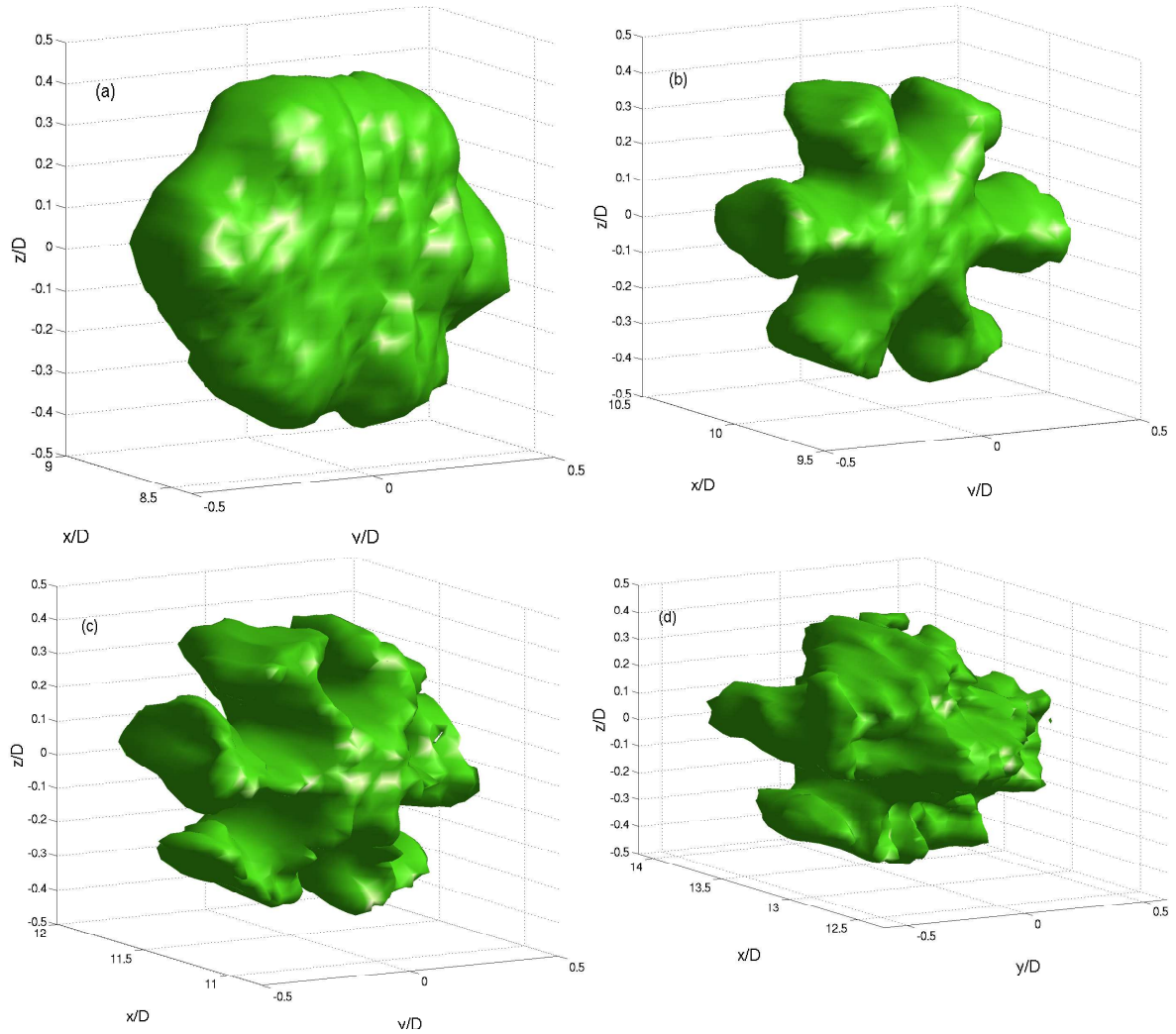


FIG. 3.25 – Isosurfaces de vitesse d'un anneau instable caractérisé par $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 15,1$ ms, pour les quatre distances de mesure suivantes : $x_0/D = 8,7$ (a), $x_0/D = 10$ (b), $x_0/D = 11,3$ (c) et $x_0/D = 13,3$. Ceci revient à mesurer le champ de vitesse de quatre anneaux générés de la même manière à quatre temps de vol différents. Les isosurfaces correspondent pour chaque figure à 80 % de la vitesse maximale.

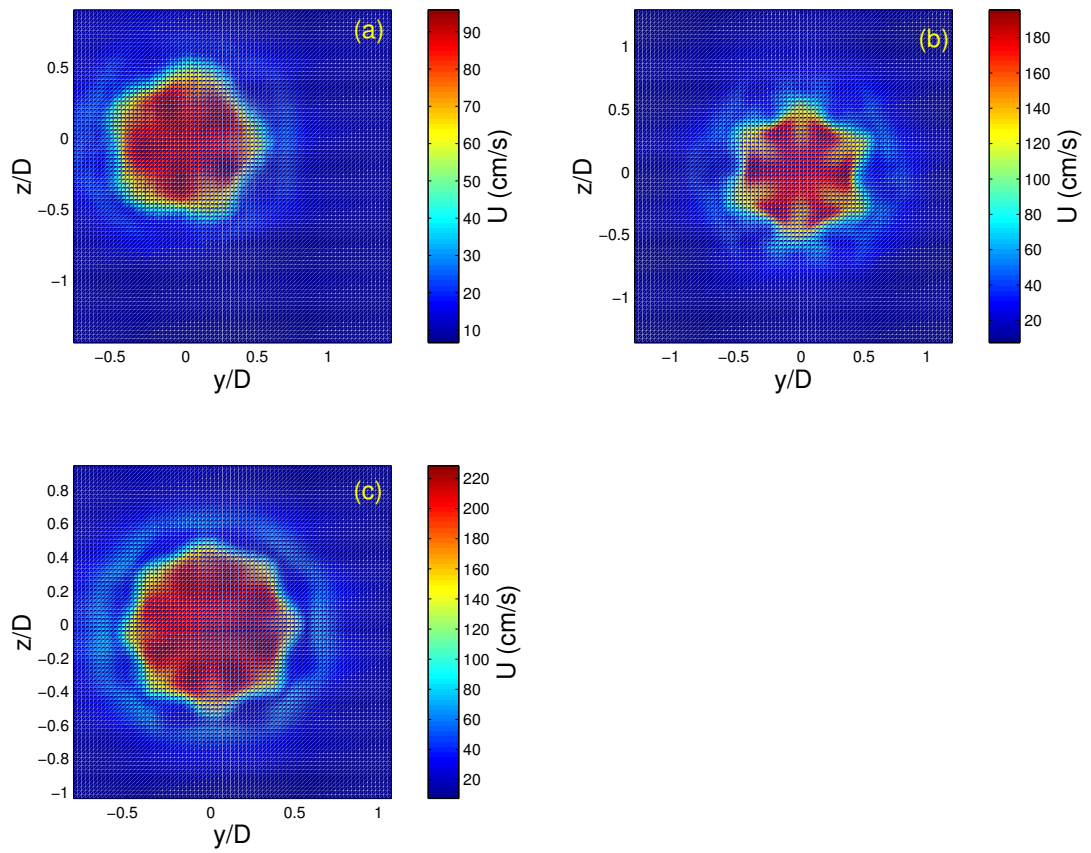


FIG. 3.26 – Cartes des champs de vitesse observées pour des anneaux présentant des nombres n d'instabilités différents. Paramètres : (a) : $D = 17$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 11,8$; (b) : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 10$; (c) : $D = 20$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 7,5$.

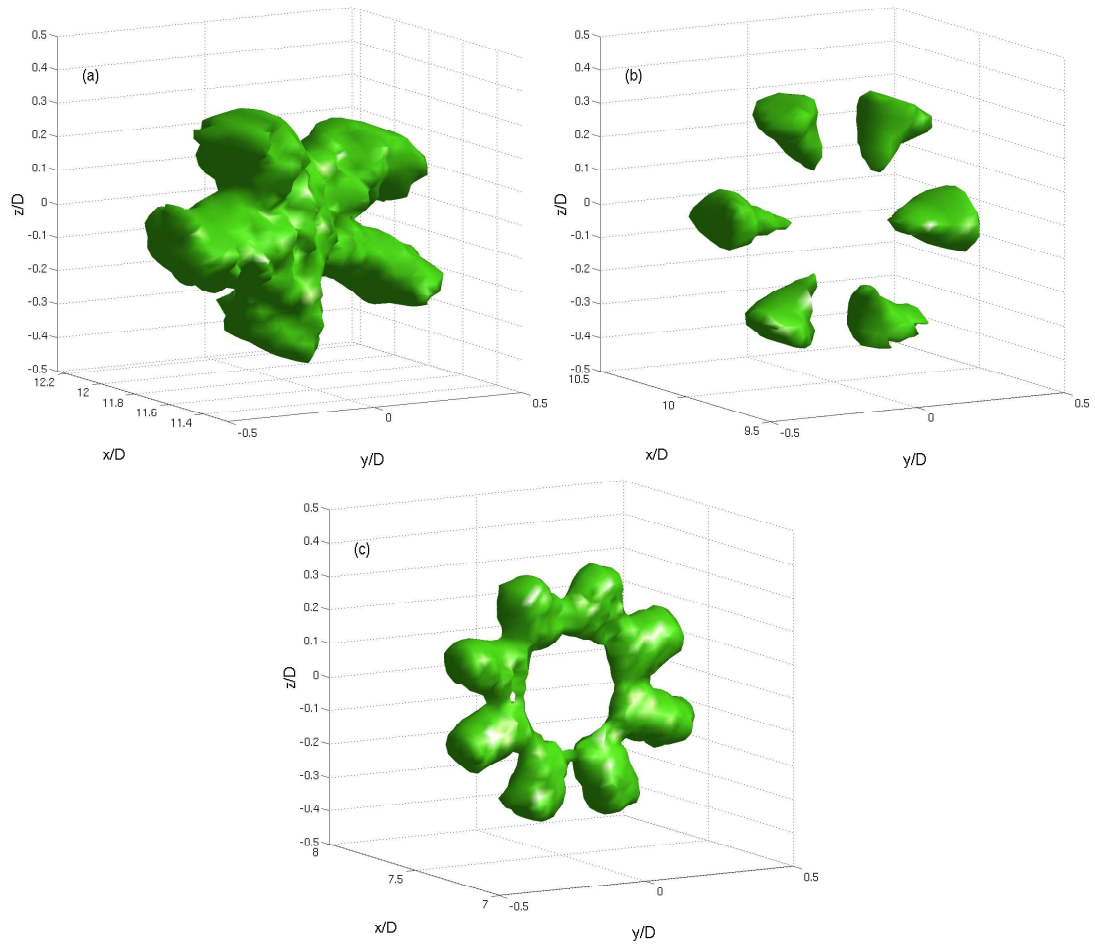


FIG. 3.27 – Isosurfaces de vitesse ($U = 0,9 \cdot U_{max}$) de trois anneaux présentant des nombres n d'instabilités différents. Paramètres : (a) : $D = 17$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 11,8$; (b) : $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 10$; (c) : $D = 20$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = 7,5$.

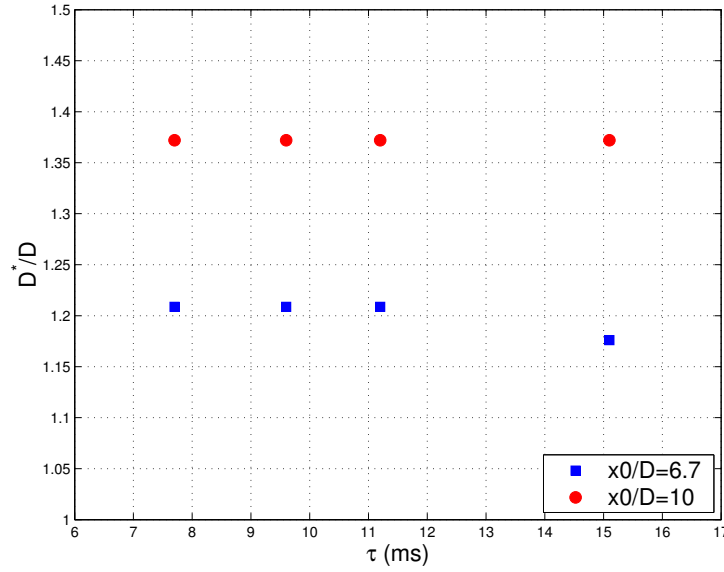


FIG. 3.28 – Évolution de D^*/D en fonction du temps de montée τ_m pour les deux distances d'acquisition $x_0/D = 6,7$ (courbe bleue) et $x_0/D = 10$ (courbe rouge).

caractéristique de l'anneau ne varie pas avec le temps de montée, *i.e* avec la quantité d'énergie fournie à l'anneau, mais bien avec le temps de vol de l'anneau (lié à la distance d'acquisition par la vitesse d'advection).

On définit ensuite le nombre de Reynolds de chaque anneau par :

$$Re = \frac{U_a D^*}{\nu},$$

où ν , la viscosité cinématique de l'air, est égale à $0,15 \text{ cm}^2/\text{s}$.

On trace ainsi la courbe adimensionnée D^*/D en fonction de Re des trois anneaux précédents (figure 3.29). On observe trois courbes bien distinctes montrant, d'une part, que la taille caractéristique de l'anneau augmente avec le Reynolds (*i.e* dans notre cas avec la distance d'acquisition) et, d'autre part, que le nombre d'instabilités n augmente lui aussi avec le Reynolds. On trace alors la courbe de la figure 3.30 et on observe que :

- $n = 5$ pour un Reynolds compris entre 900 et 1000 ;
- $n = 6$ pour un Reynolds compris entre 1100 et 1300 ;
- $n = 8$ pour un Reynolds compris entre 1500 et 1750.

Il serait tentant de penser qu'on observe un nombre d'instabilités égale à 7 sur la plage de Reynolds 1350–1500. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de concevoir une expérience permettant de s'en assurer.

Enfin, on sait que le nombre d'instabilités est défini par $n = kR$ [20], où R est le rayon de l'anneau et k le nombre d'ondes tel que $k = 2\pi/\lambda$. Ne connaissant pas exactement le rayon de l'anneau, on définit k^* tel que

$$n = k^* \frac{D^*}{2} \quad \text{avec} \quad k^* = \frac{2\pi}{\lambda^*}.$$

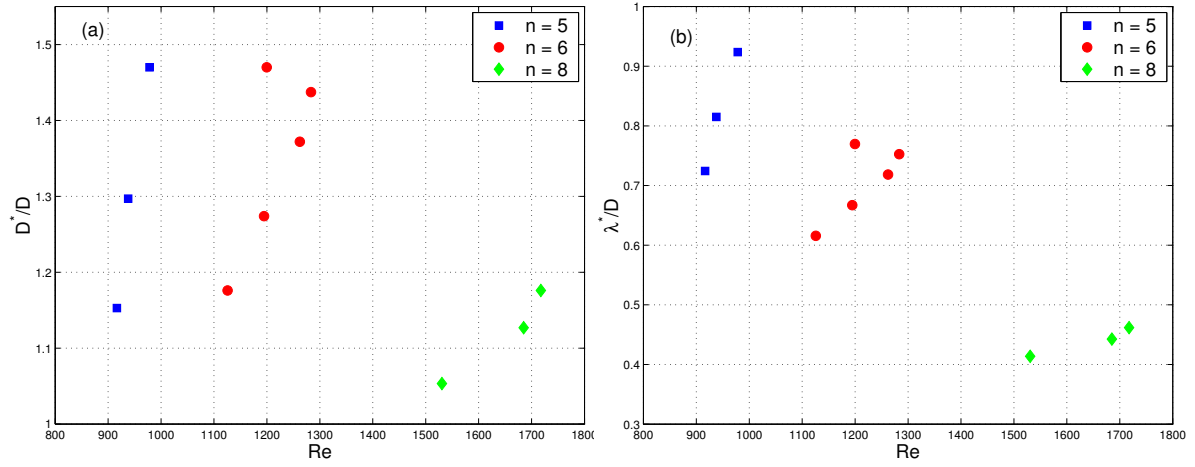


FIG. 3.29 – Courbes tracées d'après les mesures effectuées sur trois anneaux dont les paramètres sont les suivants : $D = 17$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [8,8 \ 11,8 \ 14,7]$ (courbe bleue); $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [6,7 \ 8,7 \ 10 \ 11,3 \ 13,3]$ (courbe rouge); $D = 20$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [5 \ 7,5 \ 10]$ (courbe verte). (a) : D^*/D en fonction du Reynolds. (b) : λ^*/D en fonction du Reynolds.

On obtient alors la longueur d'onde caractéristique de l'anneau, c'est-à-dire la taille caractéristique des instabilités :

$$\lambda^* = \frac{\pi D^*}{n}.$$

On trace alors la courbe adimensionnée donnant λ^*/D en fonction du Reynolds (figure 3.29). Dans les deux cas $D^*/D = f(Re)$ et $\lambda^*/D = f(Re)$, on observe des droites de pente α différente en fonction du nombre d'instabilités n . Nous pouvons donc d'ores et déjà affirmer que α décroît lorsque n augmente.

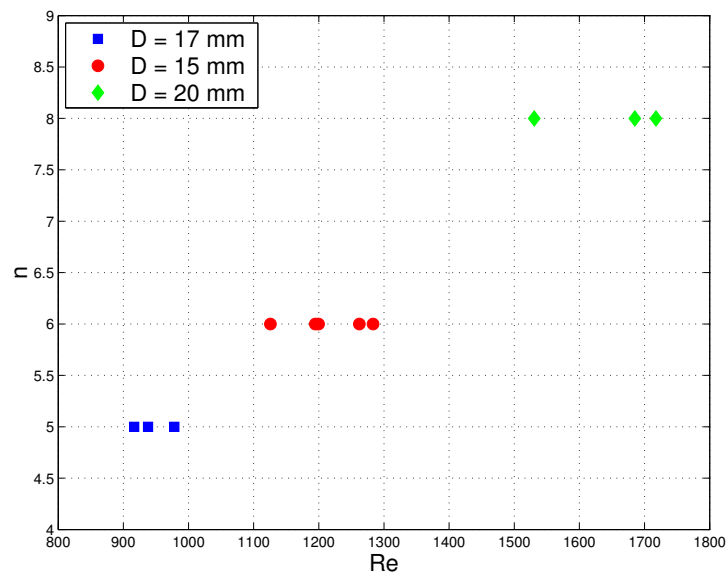


FIG. 3.30 – Courbes tracées d'après les mesures effectuées sur trois anneaux dont les paramètres sont les suivants : $D = 17$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [8,8 \ 11,8 \ 14,7]$ (courbe bleue); $D = 15$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [6,7 \ 8,7 \ 10 \ 11,3 \ 13,3]$ (courbe rouge); $D = 20$ mm, $e = 1,5$ mm, $\tau_m = 11,2$ ms, $x_0/D = [5 \ 7,5 \ 10]$ (courbe verte). Nombre d'instabilités n en fonction du Reynolds.

Chapitre 4

Conclusion

4.1 Bilan

Ce montage nous a permis de mesurer expérimentalement à l'aide d'un anémomètre à fil chaud le champ de vitesse bidimensionnel d'un grand nombre d'anneaux de vorticités stables et instables, et présentant des caractéristiques différentes. Nos trois objectifs spécifiques ont par ailleurs été remplis.

L'étude théorique nous a permis de nous pencher directement sur l'équation de Biot-Savart et de concevoir une pré-étude numérique consistant à retrouver le champ de vitesse d'un anneau de vortacité stable à partir de sa distribution de vortacité. L'étude bibliographique nous a montré que le lien entre le développement des instabilités et les paramètres géométriques du montage n'est pas toujours très clair.

La partie numérique s'est avérée intéressante. Elle montre que l'on peut s'affranchir sous certaines conditions des équations de Navier-Stokes en utilisant la répartition de la vortacité comme base de calcul. Quatre exemples de calcul ont été mis en pratique : le filament vortical en rotation solide, le filament vortical à répartition gaussienne de vortacité, l'anneau stable en rotation solide et l'anneau stable à distribution gaussienne de vortacité.

Enfin, la partie expérimentale nous amène trois résultats intéressants. La possibilité, grâce aux double balayage de la sonde à fil chaud, d'obtenir en une série de mesure une carte des champs de vitesse des anneaux observés. La découverte d'un outil de contrôle tridimensionnel utilisant les isosurfaces de vitesse obtenus à partir des mesures directement effectuées sur des anneaux générés expérimentalement. L'obtention de plusieurs nombres n d'instabilités liés à la variation d'un paramètre géométrique du montage, et non, comme dans la plupart des expérimentations déjà effectuées, à la variation d'un paramètre dynamique.

4.2 Perspectives

L'avantage de ce type de travail est le suivant. Comme dans la plupart des travaux de recherche fondamentale, notre étude est ouverte et peut donner suite à de nouvelles expériences. Tout d'abord, la nouvelle consigne imaginée et présentée en annexe D pourra être programmée

et intégrée au générateur de fonctions. Nous nous demandons également quel est l'effet dynamique des instabilités d'un anneau de vortacité sur le transport d'un scalaire passif comme la température. Nous sommes persuadés par ailleurs de l'existence d'un nombre sans dimension reliant le diamètre D de sortie, le nombre n d'instabilités et la longueur d'onde λ . Enfin, le prochain paramètre géométrique à modifier sera l'épaisseur e du disque pour un diamètre D constant. En effet, le phénomène d'enroulement de l'anneau par le trou de sortie détermine le nombre d'instabilités apparaissant par la suite.

4.3 Remerciements

Un travail en laboratoire est avant tout un travail d'équipe, où chacun partage avec les autres son savoir faire, ses connaissances, ses interrogations et ses angoisses. Je remercie donc Gabriel ARÉVALO, pour ses nombreux coups de main concernant Matlab, Linux ou L^AT_EX, ainsi que pour avoir tué Kappa et ma sonde à fil chaud... Un grand merci à Loïc VAUGIER qui a su m'enchanter par son humour péruvien et me faire découvrir sa passion du Capuccino. Un clin d'œil à Manuel VIAL, toujours à l'affût du moindre détail et embarrassant par ses questions trop pertinentes.

Pour sûr, je n'oublierai pas de remercier Rodrigo HERNÁNDEZ, qui a veillé durant mes cinq mois de stage au bon déroulement de mon travail. Il a bel et bien réussi à me transmettre, l'œil brillant et le sourire au lèvres, sa passion pour les anneaux de vorticité et son intérêt pour les phénomènes non linéaires.

Je n'oublie pas non plus le projet FONDECYT N° 1020134 qui, par son aide financière, permet au LEAF-NL de fonctionner et d'obtenir des résultats probants.

D'une manière plus générale, je remercie tous les amis de passage chiliens ou latino-américains qui ont su agréementer ma vie sociale par de nombreux échanges culturels.

Enfin, toute cette aventure n'eût été possible si je n'avais rencontré, en septembre de l'année dernière, Clémentine BÉCHET, rescapée du LEAF-NL, et n'aurait pu se concrétiser sans l'aide et la confiance de Frédéric PLAZA, professeur de l'École Centrale de Lyon.

Annexe A

Rappels théoriques

A.1 Équations de la vortacité

A.1.1 Préliminaires

La vortacité $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ exprime la notion intuitive de tourbillon. Elle est reliée au champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ régissant l'écoulement d'un fluide par

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (\text{A.1})$$

L'importance de la vortacité vient essentiellement du fait que sans viscosité (ou avec une viscosité négligeable), elle est transportée par l'écoulement. Les deux phénomènes prépondérants sont la convection, pendant laquelle $\boldsymbol{\omega}$ change de norme et de direction, et l'étirement des tourbillons, au cours duquel $\boldsymbol{\omega}$ subit une amplification. La viscosité, quant à elle, permet le transfert de vortacité d'une particule fluide à ses voisines par un processus de diffusion moléculaire.

La matrice des gradients de vitesse se décompose comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = D_{ij} + \Omega_{ij},$$

où D_{ij} est la matrice de déformation, et

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k$$

la matrice de rotation. À la translation et la déformation des particules fluides s'ajoute donc une rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}$.

On définit les lignes de vortacité comme les lignes tangentes en chaque point à $\boldsymbol{\omega}$ (figure A.1). Ces lignes, expression quantitative de la notion de tourbillon, sont transportées par le mouvement du fluide non visqueux. Dans le repère (x_1, x_2, x_3) , elles sont déterminées par les équations

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3},$$

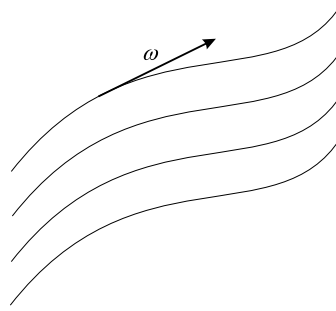


FIG. A.1 – Lignes de vorticité.

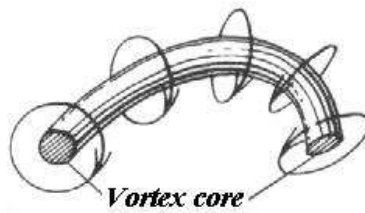


FIG. A.2 – Tube de vorticité, d'après Berliner [5].

où $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sont les composantes de $\boldsymbol{\omega}$. Par ailleurs, les lignes de vorticité passant par les points d'une courbe réductible définissent un volume de type cylindrique appelé tube de vorticité (figure A.2). Si l'on place un nombre infini de lignes de vorticité de même sens de rotation les unes à côté des autres, on obtient ce que l'on appelle une feuille de vorticité (figure A.3). Cette feuille génère une discontinuité tangentielle du champ de vitesse [7]. Cependant, il est très difficile d'obtenir ce genre de structure en laboratoire, car la viscosité cherchera toujours à contrer l'existence de la discontinuité.

On définit la circulation Γ autour d'une ligne fermée C avec un sens associé par

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}. \quad (\text{A.2})$$

Si C peut se réduire à un point sans sortir de l'écoulement (zone compacte), alors par le

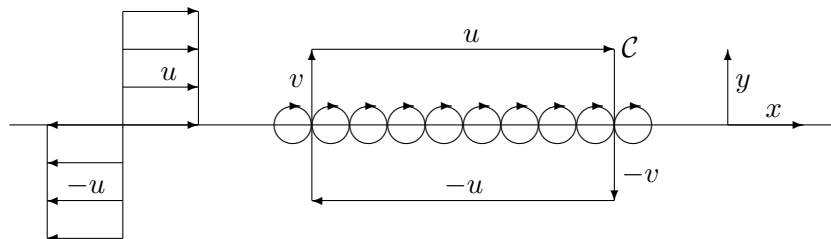


FIG. A.3 – Feuille de vorticité idéale.

théorème de Stokes,

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS,$$

où S est la surface délimitée par C de normale unitaire $\mathbf{n}$. On peut alors interpréter Γ comme un « flux » mesurant la quantité de vorticité traversant la surface S .

On peut se demander [24] jusqu'à quel point la vorticité $\boldsymbol{\omega}$ détermine l'écoulement habituellement caractérisé par le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Soit deux champs de vitesse $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ donnant la même vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Posons

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

On a alors

$$\nabla \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Le champ $\mathbf{v}$ est donc irrotationnel, et de plus incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$). $\boldsymbol{\omega}$ détermine donc $\mathbf{u}$   un champ irrotationnel solénoïdal près. On peut donc ajouter à $\mathbf{u}$ le gradient $\nabla \chi$, où χ est une solution de l'équation de Laplace $\nabla^2 \chi = 0$, sans changer $\boldsymbol{\omega}$. Finalement, si on se donne $\boldsymbol{\omega}$ et les vitesses aux frontières de l'écoulement, $\mathbf{u}$ est uniquement déterminé. Ainsi, pour un écoulement infini sans frontière, si $\mathbf{u}$ décroît suffisamment rapidement à l'infini, on peut écrire l'équation de Biot-Savart :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 \mathbf{x}'. \quad (\text{A.3})$$

On remarquera l'analogie vorticité / courant électrique et champ de vitesse / champ magnétique. Cette analogie est détaillée dans l'Annexe B.

A.1.2 Dynamique du tourbillon

On se donne comme point de départ l'équation de la quantité de mouvement en fluide visqueux incompressible

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (\text{A.4})$$

où $\Pi = \frac{P}{\rho} + \Psi$ représente les forces dérivant d'un potentiel, avec

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}.$$

En définissant la charge par

$$H = \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{P}{\rho} + \Psi,$$

on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla H + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (\text{A.5})$$

$\nabla \times (\text{A.5})$ nous donne alors l'équation d'Helmholtz :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}}_{\text{Convection}} = \underbrace{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}}_{\text{étirement des tourbillons}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}}_{\text{Diffusion visqueuse}}. \quad (\text{A.6})$$

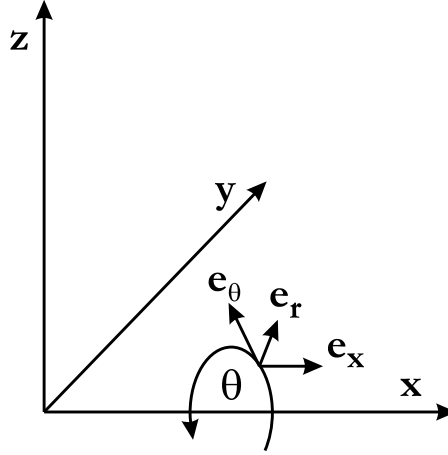


FIG. A.4 – Repère utilisé.

Sans viscosité, (A.6) s'écrit

$$\frac{D\omega}{Dt} = \omega \cdot \nabla \mathbf{u}$$

et donne l'évolution de la vorticité en suivant le fluide. Dans ce cas particulier, la circulation Γ le long d'une ligne mati rielle C se conserve (théorème de Kelvin).

Si au contraire on veut se pencher sur les effets de la viscosité, on obtient l'équation de diffusion vectorielle

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega \quad (\text{A.7})$$

de diffusivité ν . On remarquera l'analogie avec la conduction thermique.

A.2 Cas de l'anneau de vorticité

A.2.1 Champ de vitesse

Les anneaux que nous allons étudier seront supposés axisymétriques et, dans un premier temps, de cœur fin. Le fluide considéré sera l'air du laboratoire. Nous travaillerons sans viscosité. Pour mener à bien nos calculs, nous utiliserons les coordonnées cylindriques (r, θ, x) d'un repère fixe par rapport au centre de l'anneau (figure A.4) où $r = \sqrt{y^2 + z^2}$. On note $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_x)$ la vitesse en un point quelconque de l'espace. L'anneau étant considéré comme axisymétrique autour de l'axe $r = 0$, toutes les dérivées partielles par rapport à θ seront nulles :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{A.8})$$

  l'échelle du laboratoire, l'air est considéré comme incompressible. L'équation de conservation de la masse s'écrit donc

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0,$$

et il existe une fonction courant ψ , appelée fonction de Stokes [2], telle que :

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (\text{A.9})$$

Dans le repère $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_x)$, et compte tenu de (A.8), $\boldsymbol{\omega}$ aura les composantes suivantes :

$$(\omega_r, \omega_\theta, \omega_x) = \left(-\frac{\partial u_\theta}{\partial x}, \frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} \right).$$

En supposant que la composante u_θ de la vitesse est nulle, *i.e.* que l'anneau ne tourne pas autour de l'axe des x , et en appliquant (A.9), on obtient finalement :

$$\boldsymbol{\omega} = \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{A.10})$$

Connaissant la distribution de vorticité, on peut alors obtenir le champ de vitesse.

A.2.2 Vitesse d'advection

L'expression de la vitesse d'advection U_a varie selon la distribution de vorticité dans l'anneau. La plupart du temps, pour un anneau de rayon R , de cœur fin de rayon a et de circulation Γ , on pourra considérer cette distribution comme uniforme. Dans ce cas,

$$U_a = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{4} \right). \quad (\text{A.11})$$

Pour les anneaux modélisés par le vortex sphérique de Hill, la vorticité est distribuée linéairement par rapport à la distance au centre.

Cependant, en 1978, Saffman [20] démontre que la vorticité est distribuée de manière continue, mais non linéaire : il existe une zone de cœur intérieure où la vorticité a l'allure d'un pic très pointu, et une zone externe où la vorticité décroît algébriquement jusqu'à être nulle. Saffman note :

- a_1 le rayon du cœur intérieur pour lequel la vitesse tangentielle u_θ atteint son maximum ;
- a_e le rayon effectif du cœur vérifiant l'équation (A.11) ;
- a le rayon géométrique du cœur, défini de telle manière qu'au delà de cette distance la vorticité soit nulle.

La vitesse d'advection s'exprime alors par

$$U_a = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} + Z \right), \quad (\text{A.12})$$

où

$$Z = \frac{4\pi^2}{\Gamma^2} \int_0^a r u^2 dr.$$

Remarquons que pour une distribution uniforme, $Z = \frac{1}{4}$. L'expression (A.12) nous permet de définir le rayon a_e par

$$a_e = a e^{\frac{1}{4} - Z}.$$

Prenons maintenant le cas d'un vortex visqueux de Lamb-Oseen. Il s'agit d'un écoulement bidimensionnel de symétrie circulaire dans lequel les lignes de courant sont des cercles autour de l'axe et la vorticité, fonction de la distance radiale r et du temps t , est parallèle à l'axe [21]. Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à la projection de l'équation (A.7) sur $\mathbf{e}_\theta$ dont la solution exacte est donnée par

$$\omega_\theta = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t}, \quad \Gamma = \Gamma_0 \left(1 - e^{-r^2/4\nu t}\right), \quad u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

U_a s'exprime alors comme suit [18] :

$$U_a = \frac{\Gamma}{2\pi R} \left[\ln \frac{8R}{\sqrt{4\nu t}} - 0,558 + \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\nu t}}{r}\right) \right]. \quad (\text{A.13})$$

Sur ce dernier point, en 1997, Fabris & Liepmann [9] montrent au cours d'une expérience que la distribution de vorticité d'un anneau suit effectivement une loi gaussienne dans le cœur puis décroît de façon algébrique autour.

Annexe B

Analogies entre électromagnétisme et hydrodynamique

B.1 Définitions

Le tableau B.1 nous donne les équivalences entre les variables hydrodynamiques et électromagnétiques. Certaines hypothèses sont cependant nécessaires pour que l'analogie soit complète [3] : $\mathbf{u}$ et $\mathbf{H}$ doivent être à flux conservatifs. On est donc en présence d'un fluide incompressible et d'un milieu non magnétique, et on a naturellement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

En électromagnétisme, on peut alors écrire le théorème d'Ampère : « La circulation du champ $\mathbf{H}$ le long d'un contour C fermé entourant un conducteur parcouru par un courant I vérifie :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x},$$

où S est la surface délimitée par C de normale unitaire $\mathbf{n}$. »

En hydrodynamique, le théorème d'Ampère correspond à la définition de la circulation Γ d'un champ $\mathbf{u}$ le long d'un contour C fermé :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS,$$

la deuxième égalité étant obtenue par le théorème de Stokes si C peut se réduire à un point sans sortir de l'écoulement (zone compacte).

B.2 Équation de Biot-Savart

B.2.1 En électromagnétisme

Plaçons-nous dans le cas où le champ d'excitation magnétique $\mathbf{H}$ est créé par des fils conducteurs dans le vide. Le champ d'excitation magnétique $d\mathbf{H}$ induit en un point $\mathbf{x}$ par

Hydrodynamique	Électromagnétique
Vitesse $\mathbf{u}$	Excitation magnétique $\mathbf{H}$
Vorticité $\boldsymbol{\omega}$	Densité de courant $\mathbf{j}$
$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$	$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$

TAB. B.1 – Analogie entre les variables hydrodynamiques et électromagnétiques

un élément $d\mathbf{x}'$ de ligne de courant situé autour du point $\mathbf{x}'$ et parcouru par un courant I vérifie :

$$d\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}.$$

De même pour le champ $\mathbf{H}$ créé par une densité de courant $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'.$$

B.2.2 En hydrodynamique

Afin que les conditions limites hydrodynamiques coïncident avec les conditions limites électromagnétiques, nous devons nous placer dans un écoulement infini dans l'espace [24] [3]. Le champ de vitesse $d\mathbf{u}$ induit en un point $\mathbf{x}$ par un élément $d\mathbf{x}'$ de filament de tourbillon (ou filament vortical) de circulation Γ situé autour du point $\mathbf{x}'$ vérifie :

$$d\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{x}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}.$$

De même pour le champ $\mathbf{u}$ créé par une distribution de vorticité $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'.$$

Rappelons enfin que les vraies différences entre électromagnétisme et hydrodynamique apparaissent dans la nature des conditions de bords des champs électromagnétiques et hydrodynamiques.

Annexe C

Calibration de l'anémomètre à fil chaud TSI 1201-20-39-39

C.1 Principe

L'anémomètre à fil chaud est constitué d'un filament très fin chauffé et placé dans l'écoulement dont on veut mesurer la vitesse. Son principe de fonctionnement repose sur les échanges de chaleur de type convectifs se produisant entre le filament et l'écoulement [4]. La réponse de l'anémomètre est une tension électrique. Afin de remonter à la vitesse effective de l'écoulement, il est nécessaire de transformer cette tension en vitesse via une courbe de calibration.

Pour réaliser cette calibration, nous utilisons la section basse vitesse de la soufflerie aérodynamique fermé du LEAF-NL. Grâce à un système de laminarisation constitué de deux filtres disposés en amont de la zone d'essai, nous obtenons un écoulement laminaire et uniforme dont nous pouvons faire varier la vitesse jusqu'à environ 1,5 m/s.

Nous disposons dans la veine d'essai l'anémomètre à fil chaud TSI, ainsi qu'un tube de Pitot Dwyer relié à un manomètre Cole-Parmer dont nous connaissons toutes les caractéristiques. Nous faisons ensuite varier la vitesse de l'écoulement dans la section de 0 à 100 % de la vitesse maximale selon le tableau C.1. Pour chaque vitesse de l'écoulement, la carte d'acquisition DT 322 nous donne sur un intervalle de temps que nous avons choisi à dix secondes deux courbes à moyenner : la tension de sortie du manomètre V_{pit} et la tension de sortie de l'anémomètre V_{tsi} . La tension de seuil $V_{0_{pit}}$ est obtenue en moyennant les huit premières valeurs de V_{pit} . La différence de pression ΔP réellement mesurée par le tube de Pitot est déduite de la courbe de correspondance (figure C.1) et la vitesse exacte de l'écoulement est retrouvée par la formule de Bernoulli

$$U_{pit} = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{air}}}.$$

On trace ensuite V_{tsi}^2 en fonction de $\sqrt{U_{pit}}$ dans le but d'interpoler linéairement les mesures expérimentales selon la loi de King. Le programme de calibration ci-après (C.2.1) nous donne les coefficients de la courbe de calibration C.2 reliant la tension de sortie de l'anémomètre à

Variation de la vitesse	Pas
0 à 15 %	1 %
15 à 50 %	5 %
50 à 100 %	10 %

TAB. C.1 – Variation de la vitesse de l'écoulement dans la section basse vitesse du tunnel en pourcentage de la vitesse maximale.

la vitesse réelle de l'écoulement. La calibration effectuée nous permet de mesurer des vitesses comprises entre 0 et 1,5 m/s. Cependant, nous considérons le modèle comme acceptable pour des écoulements allant jusqu'à 2 m/s.

Ainsi, lorsque nous ferons des mesures expérimentales du champ de vitesse d'un anneau de vorticité, nous convertirons directement la tension en Volts donnée par l'anémomètre en une vitesse exprimée en cm/s à l'aide du programme Matlab *calibra3* (C.2.2).

C.2 Programmes Matlab

C.2.1 Calibration du TSI 39-39

```
%% Calibration du TSI 39-39
%%
%%          28/07/04 RHP/BC
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Masse volumique de l'air en kg/m3
rho = 1.2255;
%DPmax = 0.1 inches of water = 24.908891 Pa
DPmax = 24.908891;
%Gain et Offset du TSI
Gain = 2; Offset = 1.7;
%Fr quences du moteur triphasé en pourcentage de la vitesse maximale
idx = [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,20,25,30,35,40,45,50,...
        60,70,80,90,100];
N = length(idx);

%Lecture des données expérimentales
for k=1:N;
    [t,v]=load_dt322(sprintf('TSI39-39_M%d_1_0.bin',idx(k)),2);
    %v(:,1) = TSI, v(:,2) = Pitot
    Vtsi(k) = mean(v(:,1))/Gain + Offset; Vpit(k) = mean(v(:,2));
end;

%D termination de V0pit (Vitesses très faibles)
V0pit = mean(Vpit(1:8));
%D termination de DP (Courbe de correspondance)
```

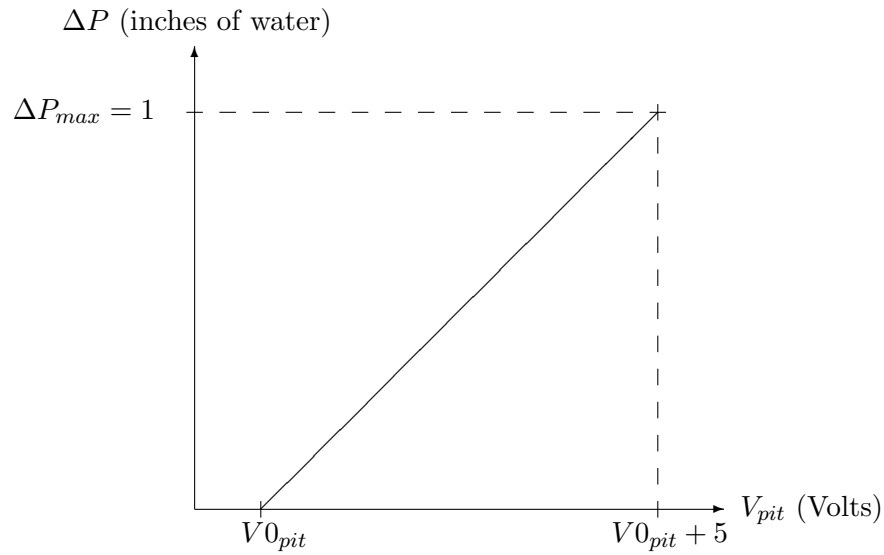


FIG. C.1 – Courbe de correspondance entre la tension de sortie V_{pit} du manomètre Cole-Parmer et la différence de pression ΔP mesurée à l'aide du tube de Pitot Dwyer.

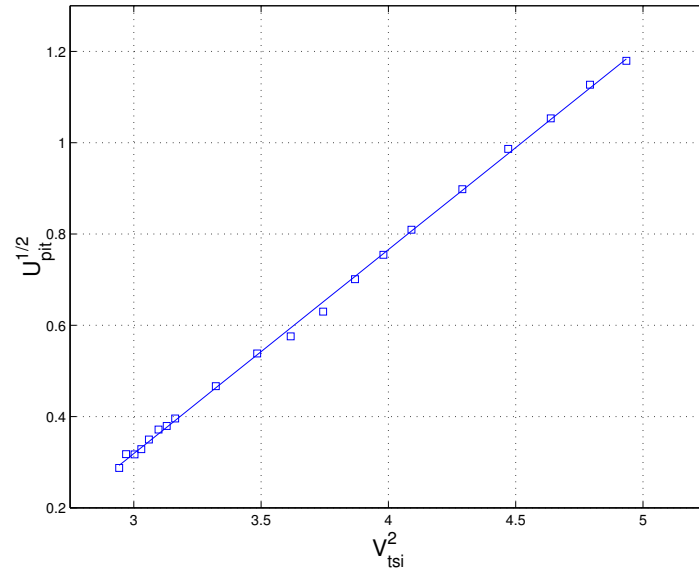


FIG. C.2 – Courbe de calibration reliant le carré de la tension de sortie de l'anémomètre V_{tsi}^2 à la racine carrée de la vitesse réelle de l'écoulement mesurée par le tube de Pitot $\sqrt{U_{pit}}$ selon la loi de King.

```

DP = DPmax/5 *(Vpit(9:N) - V0pit);
%Détermination de Upit en m/s (Bernouilli)
Upit = sqrt(2*DP/rho);

%Interpolation linéaire (Loi de King)
Coef = polyfit(Vtsi(9:N).^2, sqrt(Upit),1);
%Courbe expérimentale et courbe de calibration
plot(Vtsi(9:N).^2,sqrt(Upit),'bs',...
      Vtsi(9:N).^2,polyval(Coef,Vtsi(9:N).^2),'b');
grid on; axis([2.75,5.25,0.2,1.3]);
xlabel('V_{tsi}^2','fontsize',16);
ylabel('U_{pit}^{1/2}','fontsize',16);

%Remarque: Les huit premières valeurs de Vpit ne changent pas
%           Elles sont utilisées pour calculer la moyenne de V0pit

```

C.2.2 Programme *calibra3*

```

%% Fonction Calibra3.m
%% Anémomètre TSI 1201-20-39-39
%% U = calibra3(V)
%% V : tension de sortie du TSI en Volts
%% U : vitesse réelle en cm/s
%%
%%                                     28/07/04 RHP/BC
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [U] = calibra3(V)

%Coefficients de calibration
C = [0.44704532579610 -1.02231557238236];
%sqrt(Upit)=f(Vtsi.^2)
U = ((polyval(C,V.^2)).^2)*100; %en cm/s

```

Annexe D

Projet de consigne

Dans le but de minimiser le risque de perturbation de l'anneau lors du retour du piston, nous avons conçu une nouvelle consigne pour laquelle le temps de descente τ_d est environ quatorze fois plus grand que le temps de montée τ_m .

D.1 Code Matlab de la nouvelle consigne

```
function consigne

%*****
%Projet de consigne
%Temps descente > Temps de montée
%***** 2004/08/30 B.Cibert, G.Arévalo, leaf-nl *****

x=[0:0.001:1];

h=plot(x,0.1*tanh(200*x-20).*(-tanh(sinh((200*x-130)/30)))+0.1,...
    [.025,.15],[.1264,.1264],[.27,.75],[0.0736,0.0736],...
    [.075,.075],[-0.05,0.22],'k--',[.1014,.1014],[-0.05,0.22],'k--',...
    [.316,.316],[-0.05,0.22],'k--',[.69,.69],[-0.05,0.22],'k--');
set(h(3),'Color',[0,.5,0]); axis([0,1,-0.05,0.22]);
xlabel('t (s)','FontSize',16); ylabel('E (V)','FontSize',16); grid on;
%Temps de montée : 26.4 ms
%Temps de descente : 374 ms
```

D.2 Consigne obtenue

La figure D.1 donne l'allure d'une consigne à $f = 1$ Hz pour une amplitude et un offset égaux à ceux de la consigne d'origine (voir figure 3.6). Il suffit ensuite de l'intégrer au générateur de fonction HP 33120A.

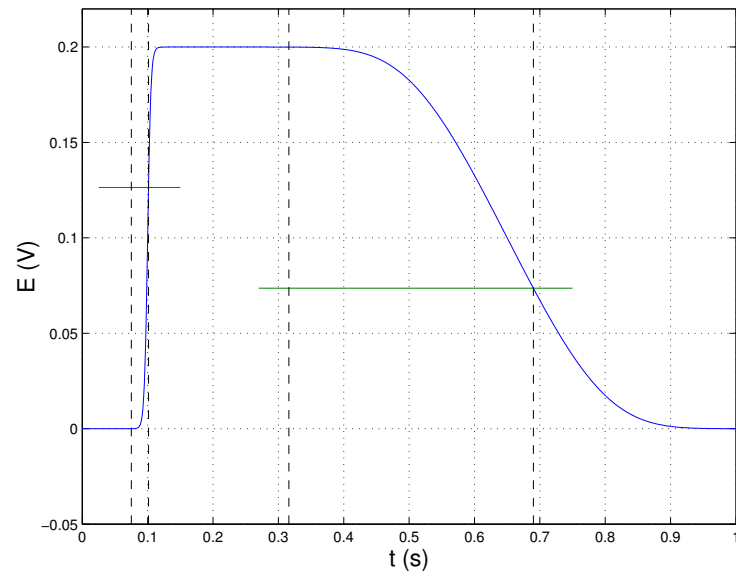


FIG. D.1 – Projet de consigne à $f = 1$ Hz. Motif d’amplitude 200 mV avec un offset de 100 mV. Le temps de montée défini à 63,2 % de l’amplitude maximale est $\tau_m = 26,4$ ms. Le temps de descente défini à $1 - 63,2$ % de l’amplitude maximale est $\tau_d = 374$ ms, soit environ quatorze fois plus grand que le temps de montée.

Annexe E

Quelques programmes Matlab

La partie numérique de cette étude ainsi que les figures d'interprétation des résultats ont été générées à l'aide du logiciel Matlab. Cette annexe présente donc quelques-uns des programmes effectués au cours de ce travail.

E.1 Programme *anneau2*

```
function anneau2(R,a,N)

%*****
%ANNEAU2(R,a,N) effectue le tracé de deux types d'anneaux :
%un anneau normal ;
%un anneau déformé dynamiquement (Widnall).
%R est le rayon de l'anneau, a le rayon du coeur,
%N est le nombre d'instabilités.
%***** Last revision : 2004/06/02 B.Cibert, leaf-nl *****

k=2; n=75; th=[0:2*pi/n:2*pi]; ph=[0:2*pi/n:2*pi]; figure(1);

%Anneau normal
subplot(1,2,1);
x=(a*cos(ph))'*ones(1,length(th));
y=((R+a*sin(ph))'*ones(1,length(th))).*(ones(length(ph),1)*cos(th));
z=((R+a*sin(ph))'*ones(1,length(th))).*(ones(length(ph),1)*sin(th));
surf(x,y,z); shading interp; axis([-1,1,-4,4,-3,3]); daspect([1,1,1]);
zlabel('z (cm)', 'FontSize',16); view(35,25);

%Anneau déformé
subplot(1,2,2);
x=(a*cos(ph))'*ones(1,length(th))+ones(length(ph),1)*(sin(N*th)/k);
y=((R+a*sin(ph))'*ones(1,length(th)))+...
ones(length(ph),1)*(sin(N*th)/k)).*(ones(length(ph),1)*cos(th));
z=((R+a*sin(ph))'*ones(1,length(th)))+...
```

```

ones(length(ph),1)*(sin(N*th)/k)).*(ones(length(ph),1)*sin(th));
surf(x,y,z); shading interp; axis([-1,1,-4,4,-3,3]); daspect([1,1,1]);
xlabel('z (cm)', 'FontSize',16); view(35,25);

```

E.2 Programme *biotfil2*

```

function [X,Y,Z,U,V,W]=biotfil2(a)

%*****
%[X,Y,Z,U,V,W] = BIOTFIL2(a) renvoie le maillage 3D (X,Y,Z) et
%le champ de vitesse (U,V,W) d'un filament vortical en rotation solide.
%Le paramètre d'entrée a fixe le rayon du filament en cm (0<a<10).
%***** Last revision : 2004/06/02 B.Cibert, leaf-nl *****

%Construction de la matrice cubique externe (r). Taille=34*34*34
tic; dX=.5; dY=.5; dZ=.5;
[X,Y,Z]=meshgrid(-8.25:dX:8.25,-8.25:dY:8.25,-8.25:dZ:8.25);
S=size(X);
%Construction de la matrice cubique interne (r'). Taille=33*33*33
%Les deux matrices sont décalées pour éviter les divisions par zéros
dx=.5; dy=.5; dz=.5;
[x,y,z]=meshgrid(-8:dx:8,-8:dy:8,-8:dz:8); d=dx*dy*dz;
s=size(x)
%Distribution de vorticité : w vaut 1 à l'intérieur du filament, 0 ailleurs
wz=x.^2+y.^2<a*a*ones(s);
U=0; V=0; W=zeros(S); %initialisation de U,V à zéro
%Calcul de l'intégrale
for i=1:s(1) %balayage selon x de la matrice interne
    for j=1:s(2) %balayage selon y
        for k=1:s(3) %balayage selon z
            if wz(i,j,k)~=0
                %Variables locales
                Xx=X-x(i,j,k); Yy=Y-y(i,j,k); Zz=Z-z(i,j,k);
                %Matrice cubique des normes au carré
                n2=Xx.^2+Yy.^2+Zz.^2;
                %Int  grale de Biot-Savart
                %U,V,W obtenus avec les formules classiques du produit vectoriel
                U=U-(wz(i,j,k)*Yy./((sqrt(n2)).^3))*d;
                V=V+(wz(i,j,k)*Xx./((sqrt(n2)).^3))*d;
            end
        end
    end
    t=toc; fprintf(['    i = ',num2str(i),' ; t = ',num2str(t),' s\n'])
end

%Trac   profil de vitesse

```

```

figure(1);
plot(X(17,:),V(17,:),17),'bs-',[2.25,2.25],[-15,15],'k--',...
     [-2.25,-2.25],[-15,15],'k--'); grid on;
text(-1,12,'(1)','fontsize',18); text(5,12,'(2)','fontsize',18);
text(-5,-12,'(2)','fontsize',18); xlabel('x (cm)','fontsize',18);
ylabel('V (cm/s)','fontsize',18); text(-9.5,13,'(a)','fontsize',18);
set(get(1,'children'),'fontsize',13);

%Tracé champ de vitesse
figure(2);
quiver(X(:,:,17),Y(:,:,17),U(:,:,17),V(:,:,17)); daspect([1,1,1]);
hold on; theta=0:0.01:2*pi;
plot(2.25*cos(theta),2.25*sin(theta),'k',[-10,10],[0,0],'k-.',...
     [0,0],[-10,10],'k-.'); hold off;
text(-.75,0,'(1)','fontsize',16); text(5,5,'(2)','fontsize',16);
text(-9.5,9,'(b)','fontsize',16); xlabel('x (cm)','fontsize',16);
ylabel('y (cm)','fontsize',16);

```

E.3 Programme *biotann5*

```

function [yy,nn]=biotann5(a)

%*****
%[yy,nn] = BIOTANN5 renvoie l'axe Y et la norme du champ
%de vitesse (sqrt(U.^2+V.^2+W.^2)) d'un anneau de vorticité en
%rotation solide calculé par la formule de Biot-Savart.
%Rayon de l'anneau R = 4 cm
%Rayon du coeur a paramètre d'entrée.
%Maillage 42*42*42.
%***** Last revision : 2004/08/17 B.Cibert, leaf-nl *****

%Construction de la matrice cubique externe (r).
R=4; tic; dX=.4; dY=.4; dZ=.4;
[X,Y,Z]=meshgrid(-8.2:dX:8.2,-8.2:dY:8.2,-8.2:dZ:8.2);
S=size(X);
%Construction de la matrice cubique interne (r').
Les deux matrices sont décalées pour éviter les divisions par zéros
dx=.4; dy=.4; dz=.4;
[x,y,z]=meshgrid(-8:dx:8,-8:dy:8,-8:dz:8); d=dx*dy*dz;
s=size(x)
%Distribution de vorticité : w vaut 1 à l'intérieur de l'anneau, 0 ailleurs
w=and(z.^2<(R+sqrt(a^2-x.^2)).^2-y.^2,z.^2>(R-sqrt(a^2-x.^2)).^2-y.^2);
wy=-w.*sin(atan2(z,y)); %Composante norm e en y du vecteur w
wz=w.*cos(atan2(z,y)); %Composante norm e en z du vecteur w
U=0; V=0; W=0; %initialisation de U,V,W à zéro
%Calcul de l'intégrale

```

```

for i=1:s(1) %balayage selon x de la matrice interne
    for j=1:s(2) %balayage selon y
        for k=1:s(3) %balayage selon z
            if w(i,j,k)~=0
                %Variables locales
                Xx=X-x(i,j,k); Yy=Y-y(i,j,k); Zz=Z-z(i,j,k);
                %Matrice cubique des normes au carré
                n2=Xx.^2+Yy.^2+Zz.^2;
                %Intégrale de Biot-Savart
                %U,V,W obtenues avec les formules classiques du produit vectoriel
                U=U+((wy(i,j,k)*Zz-wz(i,j,k)*Yy)/((sqrt(n2)).^3))*d;
                V=V+(wz(i,j,k)*Xx/((sqrt(n2)).^3))*d;
                W=W-(wy(i,j,k)*Xx/((sqrt(n2)).^3))*d;
            end
        end
    end
    t=toc; fprintf(['      i = ',num2str(i),' ; t = ',num2str(t),' s\n'])
end

%Paramètres de sortie
U=U/(4*pi); V=V/(4*pi); W=W/(4*pi);
yy=[-8.2:dY:8.2]; nn=sqrt(U.^2+V.^2+W.^2);

```

E.4 Programme *widnall*

```

function widnall(R,N,r,x)

%*****
%WIDNALL(R,N,r,x) trace l'allure des instabilités du centre du coeur
%d'un anneau de vorticité avec :
%R = rayon de l'anneau (cm);
%N = nombre d'instabilités ;
%r = perturbation radiale ;
%x = perturbation axiale.
%***** Last revision : 2004/08/24 B.Cibert, leaf-nl *****

theta=[0:2*pi/100:2*pi];
cline=zeros(1,length(theta));
y1=(R+r*exp(i*N*theta)).*cos(theta);
y2=(R+r*exp(i*N*theta)).*sin(theta);
y3=(x*exp(i*N*theta));
figure(1);
%Vue de face
subplot(2,2,1);
plot(real(y1),real(y2),R*cos(theta),R*sin(theta));
axis equal; grid on; xlabel('y','fontsize',16); ylabel('z','fontsize',16);

```

```
%Vue de côté
subplot(2,2,2);
plot(real(y3),real(y2),cline,R*sin(theta));
axis equal; grid on; xlabel('x','fontsize',16); ylabel('z','fontsize',16);
%Perspective 1
subplot(2,2,3);
plot3(real(y1),real(y2),real(y3),R*cos(theta),R*sin(theta),cline);
axis equal; xlabel('y','fontsize',16); ylabel('z','fontsize',16);
zlabel('x','fontsize',16); view(-20,25);
%Perspective 2
subplot(2,2,4);
plot3(real(y1),real(y2),real(y3),R*cos(theta),R*sin(theta),cline);
axis equal; xlabel('y','fontsize',16); ylabel('z','fontsize',16);
zlabel('x','fontsize',16); view(20,25);
```

Bibliographie

- [1] ARAKERI J. H., DAS D., KROTHAPALLI A. & LOURENCO L. 2004. *Vortex Ring Formation at the Open End of a Shock Tube : A Particle Image Velocimetry Study*. Physics of Fluids, Vol. 16, N° 4, pp. 1008–1019.
- [2] BATCHELOR G. K. 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- [3] BEAUME G. & CHIKHI A. 2002/2003. *Les tourbillons dans les sillages des avions*. Projet Bibliographique, École Normale Supérieure de Lyon.
- [4] BÉCHET C. 2003. *Étude Expérimentale de la Dynamique et de l'Éclatement des Anneaux de Vorticité*. École Centrale de Lyon–Universidad de Chile, Travail de Fin d'Études.
- [5] BERLINER A. 1934. *Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung*. Julius Springer.
- [6] DAZIN A., DUPONT P. & STANISLAS M. 2002. *Experimental Study of the Instability of Vortex Rings*. 11th International Symposium, Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics, Lisboa, Portugal, July 2002.
- [7] EILEK J. A. 2003. *Section I : Introduction and Incompressible Flow, Chapter 3 : Vorticity*. Physics 526 Notes.
- [8] FABRIS D., LIEPMANN D. & MARCUS D. 1996. *Quantitative Experimental and Numerical Investigation of a Vortex Ring Impinging on a Wall*. Physics of Fluids, Vol. 8, N° 10, pp. 2640–49.
- [9] FABRIS D. & LIEPMANN D. 1997. *Vortex Ring Structure at Late Stages of Formation*. Physics of Fluids, Vol. 9, N° 9, pp. 2801–03.
- [10] FUKUMOTO Y. & HATTORI Y. 2003. *Linear Stability of a Vortex Ring Revisited*. Proc. IUTAM Symposium on tubes, sheets and singularities in fluid dynamics, edited by Moffatt H. K. & Bajer K. (Kluwer, 2003), pp. 37–48.
- [11] GHARIB M., RAMBOD E. & SHARIFF K. 1998. *A Universal Time Scale for Vortex Ring Formation*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 360, pp. 121–40.
- [12] GLEZER A. 1988. *The Formation of Vortex Rings*. Physics of Fluids Vol. 31, pp. 3532–42.
- [13] JAMES S. & MADNIA C. K. 1996. *Direct Numerical Simulation of a Laminar Vortex Ring*. Physics of Fluids, Vol. 8, N° 9, pp. 2400–14.
- [14] KIDA S., TAKAOKA M. & HUSSAIN F. 1991. *Collision of Two Vortex Rings*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 230, pp. 583–646.
- [15] KOP'EV V. F. & CHERNYSHEV S. A. 2000. *Vortex Ring Oscillations, the Development of Turbulence in Vortex Rings and Generation of Sound*. Physics–Uspekhi **43** (7), pp. 663–90.

- [16] LIM T. T. 1997. *On the Role of Kelvin-Helmholtz-like Instability in the Formation of Turbulent Vortex Rings*. Fluid Dynamics Research, Vol. 21, pp. 47–56.
- [17] MANSFIELD J. R., KNIO O. M. & MENEVEAU C. 1999. *Dynamic LES of Colliding Vortex Rings Using a 3D Vortex Method*. Journal of Computational Physics, **152**, pp. 305–45.
- [18] MAXWORTHY T. 1972. *The Structure and Stability of Vortex Rings*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 51, part 1, pp. 15–32.
- [19] MOHSENI K., RAN H. & COLONIUS T. 2001. *Numerical Experiments on Vortex Ring Formation*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 430, pp. 267–82.
- [20] SAFFMAN P. G. 1978. *The Number of Waves on Unstable Vortex Rings*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 84, part 4, pp. 625–39.
- [21] SAFFMAN P.G. 1992. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- [22] SHARIFF K. & LEONARD A. 1992. *Vortex Rings*. Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 24, pp. 235–79.
- [23] SHARIFF K., VERZICCO R. & ORLANDI P. 1994. *A Numerical Study of Three-dimensional Vortex Ring Instabilities : Viscous Corrections and Early Nonlinear Stage*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 279, pp. 351–75.
- [24] SCOTT J. 2003. *Cours de Mécanique des Fluides Approfondie*. École Centrale de Lyon.
- [25] SULLIVAN J. P., WIDNALL S. E. & EZEKIEL S. 1973. *Study of Vortex Rings Using a Laser Doppler Velocimeter*. AIAA Journal, Vol. 11, N° 10, pp. 1384–98.
- [26] VLADIMIROV V. A. & TARASOV V. F. 1979. *Structure of Turbulence near the Core of a Vortex Ring*. Sov. Phys. Dokl. **24** (4), pp. 254–56.
- [27] WIDNALL S. E. & SULLIVAN J. P. 1973. *On the Stability of Vortex Rings*. Proc. R. Soc. Lond. A. **332**, pp. 335–53.
- [28] WIDNALL S. E., BLISS D. B. & TSAI C.-Y. 1974. *The Instability of Short Waves on a Vortex Ring*. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 66, part 1, pp. 35–47.
- [29] WIDNALL S. E. & TSAI C.-Y. 1977. *The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity*. Philosophical Transactions of the Royal Soc. London 287, N° 1344, pp. 273–305.